

FORTSCHRITTE
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
IN MONOGRAPHIEN
HERAUSGEGEBEN VON OTTO BLUMENTHAL
HEFT 3

GRUNDZÜGE EINER ALLGEMEINEN THEORIE DER LINEAREN INTEGRALGLEICHUNGEN

VON

DAVID HILBERT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

Vorwort.

Im vorliegenden Buche bringe ich meine sechs Mitteilungen „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" im wesentlichen so, wie ich sie während der Jahre 1904—1910 in den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen veröffentlicht habe, zum Wiederabdruck.[1]) Die in diesen Mitteilungen enthaltene Theorie ist seitdem von meinen Schülern und anderen jüngeren Mathematikern durch wertvolle Untersuchungen ergänzt und in wesentlichen Punkten weitergeführt worden. Ich sehe von allen besonderen Angaben hinsichtlich der an meine Mitteilungen anknüpfenden Literatur ab und erwähne nur, daß Herr O. Toeplitz ein umfassendes Lehrbuch der Theorie der linearen Integralgleichungen und der unendlichvielen Variabeln gegenwärtig bearbeitet.

Neu hinzugefügt habe ich zum Schluß ein Kapitel über kinetische Gastheorie. Während es bisher bei allen zahlreichen Anwendungen der Theorie der Integralgleichungen stets eine Differentialgleichung gewesen ist, die die Theorie der Integralgleichungen vermittelte, erscheint in der Gastheorie die lineare Integralgleichung primär als direkte Folgerung aus der Stoßformel, und da sich überdies die Theorie der Integralgleichungen zur systematischen Begründung der Gastheorie als unentbehrlich herausstellt, so erblicke ich in der Gastheorie die glänzendste Anwendung der die Auflösung der Integralgleichungen betreffenden Theoreme.

Die vorausgeschickte sachlich geordnete Inhaltsangabe[2]) soll zugleich als ein Leitfaden für die gesamte Theorie der Integralgleichungen und ihrer Anwendungen dienen, wie sich diese gegenwärtig systematisch aufbauen und am übersichtlichsten darstellen läßt.

Göttingen, Juni 1912.

David Hilbert.

---

1) Erste Mitteilung (Gött. Nachr. 1904, S. 49—91), zweite Mitteilung (Gött. Nachr. 1904, S. 213—259), dritte Mitteilung (Gött. Nachr. 1905, S. 307—338), vierte Mitteilung (Gött. Nachr. 1906, S. 157—227), fünfte Mitteilung (Gött. Nachr. 1906, S. 439—480), sechste Mitteilung (Gött. Nachr. 1910, S. 355—417); den sechs Mitteilungen entsprechen die sechs Abschnitte dieses Buches.

2) Gött. Nachr. 1910, S. 595—618.

Sachlich geordnete Inhaltsangabe.

(Die römischen Zahlen bezeichnen die Kapitelnummern.)

Hauptteile A—F:

A. Theorie der Funktionen unendlich vieler Veränderlicher.

1. *Definition der Beschränktheit.* Eine Funktion von unendlich vielen Veränderlichen $F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ heißt beschränkt, wenn ihr n-ter Abschnitt $F(x_1, x_2, \ldots x_n, 0, 0, \ldots)$ dem absoluten Betrage nach für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots$, für die

$$\sum_{(p=1,\,2,\,\ldots)} x_p^2 \leqq 1$$

ist, unterhalb einer festen, von n unabhängigen Schranke M liegt. Speziell ist eine Linearform

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots$$

dann und nur dann beschränkt, wenn

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots$$

konvergiert; eine Bilinearform

$$\sum_{(p,\,q=1,\,2,\,\ldots)} a_{pq} x_p y_q,$$

wenn

$$\left| \sum_{p,\,q=1,\,2,\,\ldots\,n} a_{pq} x_p y_q \right|$$

unterhalb einer von n unabhängigen Grenze M liegt.

Eine lineare Transformation

$$y_p = \sum_{(q=1,\,2,\,\ldots)} a_{pq} y_q \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

heißt beschränkt, wenn die zugehörige Bilinearform

$$\sum_{(p,\ q=1,\ 2,\ \ldots)} a_{pq} x_p y_q$$

beschränkt ist. Eine solche Transformation führt jedes Wertsystem mit konvergenter Quadratsumme in ein ebensolches über. (XI. S. 125—126.)

2. *Die Faltungssätze* besagen, daß die sukzessive Ausführung, d. h. „Faltung", zweier oder mehrerer beschränkter Transformationen selbst wieder eine beschränkte lineare Transformation ergibt, (XI. S. 128) und ferner, daß dieser Zusammensetzungsprozeß assoziativ ist (XI. S. 129). Wendet man auf die Variabeln einer beschränkten linearen, quadratischen oder bilinearen Form eine beschränkte lineare Transformation an, so ist das Resultat eine beschränkte Form derselben Art.

3. Eine *orthogonale Transformation* ist eine solche lineare Transformation

$$y_p = \sum_{(q)} o_{pq} x_q, \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

die den beiden Bedingungen

$$\sum_{(r)} o_{pr}\, o_{qr} = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases}$$

$$\sum_{(r)} o_{rp}\, o_{rq} = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases}$$

genügt (XI. S. 129—130). Zwei Linearformen

$$\sum_{(p)} a_p x_p, \quad \sum_{(p)} b_p x_p$$

heißen zueinander orthogonal, wenn

$$\sum_{(p)} a_p b_p = 0$$

ist. Unendlich viele Linearformen bilden ein vollständiges Orthogonalsystem, wenn ihr Koeffizientenschema dasjenige einer orthogonalen Transformation ist. Ein System von endlich oder unendlich vielen orthogonalen Linearformen kann durch Hinzufügung von endlich oder abzählbar vielen Linearformen zu einem vollständigen Orthogonalsystem ergänzt werden. (XI. S. 141—143.)

Die Faltung zweier Bilinearformen ist orthogonalen Transformationen gegenüber kovariant. (XI. S. 131.)

4. *Vollstetigkeit.* Es seien

$$\begin{matrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \ldots \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

unendlich viele Wertsysteme, deren Quadratsumme kleiner als 1 ist und die die „Häufungsstelle“ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ besitzen in dem Sinne, daß

$$\underset{n=\infty}{L}\, x_p^{(n)} = x_p$$

ist; dann heißt eine Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ vollstetig, wenn für jede Folge solcher Wertsysteme

$$\underset{n=\infty}{L}\, F(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots) = F(x_1, x_2, \ldots)$$

ist. (XI. S. 147, XIII. S. 174—175.) Jede beschränkte Linearform ist vollstetig, indessen nicht jede beschränkte quadratische oder bilineare Form; so ist

$$\nu_1 x_1^2 + \nu_2 x_2^2 + \cdots$$

dann und nur dann vollstetig, wenn

$$\underset{n=\infty}{L}\, \nu_n = 0,$$

während diese Form z. B. für

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 1, \ldots$$

noch beschränkt bleibt. (XI. S. 148.) Die Bilinearform

$$\sum_{(p,\, q)} a_{pq} x_p y_q$$

ist jedenfalls dann vollstetig, wenn

$$\sum_{(p,\, q)} a_{pq}^2$$

konvergiert (XI. S. 150—151, XII. S. 164).

Weitere hinreichende Kriterien für Vollstetigkeit beschränkter quadratischer Formen (XI. S. 151. Satz 36).

Für vollstetige Funktionen gilt, wie bei endlicher Variabelnzahl, der Satz von der Existenz des Maximums (XI. S. 148). Weiteres über vollstetige Funktionen (XIII. S. 175—177).

5. *Theorie der vollstetigen Formen.* Jede vollstetige quadratische Form läßt sich durch orthogonale Transformation ihrer Veränderlichen auf die Form bringen

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots,$$

wobei

$$\underset{n=\infty}{L}\, k_n = 0$$

ist; die k_n sind die reziproken Eigenwerte (XI. S. 148, Satz 35). Direkter independenter Beweis dieses Satzes (XI. S. 148—150).

Analoge Sätze gelten für die simultane Transformation zweier quadratischer Formen, deren eine vollstetig und definit ist, während die andere die Form $v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \cdots$ hat — unter v_n die Werte ± 1 verstanden — (XIII. S. 156—162 Satz 38, 38*), sowie für die Transformation

der Hermiteschen und der schiefsymmetrischen Form auf eine Normalform (XII. S. 162—164, Satz 39).

6. *Vollstetige lineare Gleichungssysteme.* Ist

$$\sum_{(p,\,q)} a_{pq}\, x_p y_q$$

eine vollstetige Bilinearform, so hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
(1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots &= a_1,\\
a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + a_{23}x_3 + \cdots &= a_2,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (1 + a_{33})x_3 + \cdots &= a_3,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

alle wesentlichen Eigenschaften der linearen Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten; d. h. dieses Gleichungssystem hat entweder für jedes Wertsystem $a_1, a_2, \ldots$ mit konvergenter Quadratsumme eine und nur eine Lösung $x_1, x_2, \ldots$ von konvergenter Quadratsumme, oder das homogene Gleichungssystem, das aus ihm entsteht, wenn man

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \ldots$$

setzt, besitzt eine endliche Anzahl linear unabhängiger solcher Lösungen; im letzteren Falle besitzt das „*transponierte*" Gleichungssystem

$$\sum_{(q)} a_{qp}\, x_q + x_p = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots)$$

genau ebenso viele linear unabhängige Lösungen, und das ursprüngliche inhomogene Gleichungssystem ist dann und nur dann auflösbar, wenn die rechten Seiten $a_1, a_2, \ldots$ ebenso vielen linearen Bedingungen genügen (XII. S. 164—174, Satz 70).

7. *Theorie der beschränkten quadratischen Formen.* Im Gegensatz zu den vollstetigen Formen bieten die nicht vollstetigen beschränkten Formen Verhältnisse dar, die denen bei endlicher Variabelnzahl nicht analog sind; doch gilt das folgende Theorem, das durch Grenzübergang vom algebraischen Problem (XI. S. 111—112) aus gewonnen wird (XI. S. 113ff.): In einer nicht vollstetigen beschränkten quadratischen Form

$$K(x) = K(x_1, x_2, \ldots)$$

lassen sich die Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ stets so orthogonal in $x_1', x_2', \ldots$ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ transformieren, daß

$$K(x) = \sum_{(p)} k_p x_p'^2 + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu;\, \xi)}{\mu}$$

wird. Dabei ist das Integral (im Stieltjesschen Sinne) über eine perfekte Punktmenge s der μ-Achse, das „*Streckenspektrum*", zu erstrecken, und die Spektralform $\sigma(\mu; \xi) \equiv \sum_{(p,\,q)} \sigma_{pq}(\mu)\xi_p \xi_q$ bedeutet eine vom Parameter μ

abhängige positiv definite quadratische Form, deren Wert für jedes feste Wertsystem der ξ als Funktion von μ von 0 bis $\sum\limits_{(p)} \xi_p^2$ monoton wächst und die die zu ihrer Charakterisierung hinreichenden Relationen

$$\sum_{(r)} \int_{(s)} u(\mu)\, d\sigma_{pr}(\mu) \int_{(s)} u(\mu)\, d\sigma_{rq}(\mu) = \int_{(s)} u(\mu)^2\, d\sigma_{pq}(\mu)$$

$$\int_{(s)} d\sigma(\mu;\, \xi) = \sum_{(p)} \xi_p^2$$

identisch für alle stetigen Funktionen $u(\mu)$ erfüllt (XI. S. 145—146, Satz 33). Die aus dem Streckenspektrum, den Eigenwerten $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots$ d. h. dem „*Punktspektrum*" (XI. S. 119) und ihren Häufungsstellen bestehende Punktmenge heißt das *Spektrum* von $K(x)$ (XI. S. 122); für jedes dem Spektrum nicht angehörige λ haben die aus der Form

$$\sum_{(p)} x_p^2 - \lambda K(x)$$

entspringenden inhomogenen Gleichungen

$$x_p - \lambda \sum_{(q)} k_{pq}\, x_q = y_p \qquad (p = 1,\ 2\ \ldots)$$

für jedes Wertsystem y_p von konvergenter Quadratsumme eine eindeutig bestimmte Lösung $x_1, x_2, x_3, \ldots$ von konvergenter Quadratsumme; diese wird mit Hilfe einer beschränkten quadratischen Form

$$\mathsf{K}(\lambda;\, x) = \sum_{(p,\, q)} \varkappa_{pq}(\lambda)\, x_p x_q = \sum_{p = 1, 2, \ldots} \frac{x_p'^2}{1 - \lambda k_p} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu;\, \xi)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}},$$

der „*Resolvente*" von $K(x)$, dargestellt durch die Formeln

$$x_p = \sum_{(q)} \varkappa_{pq}(\lambda)\, y_q.$$

Für jedes Wertsystem der x ist $\mathsf{K}(\lambda; x)$ eine analytische Funktion von λ. (XI. S. 137—138, Satz 32.) Die homogenen Gleichungen

$$x_p - \lambda \sum_{(q)} k_{pq}\, x_q = 0 \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots)$$

haben dann und nur dann eine Lösung von konvergenter Quadratsumme, wenn λ ein Eigenwert ist, und so viele unabhängige Lösungen, als dessen Vielfachheit angibt (XI. S. 147, Satz 34).

Ein Beispiel einer beschränkten Form mit Streckenspektrum (XI. S. 153—155).

Die Resolvente gewisser nicht beschränkter Formen (XI. S. 124 bis 125, Satz 31).

B. Theorie der linearen Integralgleichungen.

8. *Der Zusammenhang zwischen unendlich vielen Variabeln und Integralgleichungen* wird vermittelt durch ein vollständiges orthogonales Funktionensystem $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ... für das Intervall $a \leqq s \leqq b$, d. h. ein System von abzählbar vielen Funktionen, die den Bedingungen genügen

$$\int_a^b \Phi_p(s)\,\Phi_q(s)\,ds = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases}, \quad (\textit{Orthogonalitätsrelationen}),$$

$$\sum_{(p)} \left(\int_a^b u(s)\,\Phi_p(s)\,ds \right)^2 = \int_a^b u(s)^2 ds, \quad (\textit{Vollständigkeitsrelation});$$

dabei muß die letztere Relation für jede stetige Funktion $u(s)$ gelten. (XIII. S. 177—178.) Jeder endlichen und stetigen Funktion $f(s)$ sind in bezug auf dieses System unendlich viele Größen, ihre „*Fourierkoeffizienten*" a_p zugeordnet vermöge der Gleichungen

$$a_p = \int_a^b f(s)\,\Phi_p(s)\,ds \qquad (p = 1, 2, \ldots);$$

jeder endlichen und stetigen Funktion $K(s, t)$ von zwei Variabeln s, t ebenso zweifach unendlich viele Größen

$$a_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\,\Phi_p(s)\,\Phi_q(t)\,ds\,dt \quad (p, q = 1, 2, \ldots).$$

Die a_p sind Koeffizienten einer beschränkten Linearform, die a_{pq} Koeffizienten einer beschränkten und sogar vollstetigen Bilinearform (XIII. S. 181). Ist $K(s, t)$ symmetrisch, so sind $a_{pq} = a_{qp} = k_{pq}$ Koeffizienten einer vollstetigen quadratischen Form (XIV. S. 186).

9. *Lineare Integralgleichungen zweiter Art.* Setzt man

$$x_p = \int_a^b \Phi_p(s)\,\varphi(s)\,ds \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

so liefert jede stetige Lösung der unhomogenen bzw. homogenen Integralgleichung mit dem „*Kern*" $K(s, t)$

$$f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

bzw.

$$0 = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

eine und nur eine Lösung des inhomogenen bzw. homogenen Gleichungssystemes

$$\left.\begin{array}{l} a_p = x_p + \sum\limits_{(q)} a_{pq} x_q \\ \text{bzw.} \\ 0 = x_p + \sum\limits_{(q)} a_{pq} x_q. \end{array}\right\} \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Umgekehrt gehört zu jeder Lösung von konvergenter Quadratsumme des einen dieser Gleichungssysteme mit unendlich vielen Variabeln eine und nur eine stetige Lösung der entsprechenden Integralgleichung, nämlich:

$$\varphi(s) = f(s) - \sum_{(p)} x_p \int_a^b K(s, t)\, \Phi_p(t)\, dt;$$

demnach liefern die Sätze von 6. die Fredholmschen Sätze über die Auflösung der unhomogenen und homogenen Integralgleichung (XIII. S. 180 bis 185).

Ableitung der Lösungsformeln (Fredholmsche Formeln) unabhängig von der Theorie unendlich vieler Variabler durch Grenzübergang vom algebraischen Problem aus (II. S. 8—13; IX. S. 68.)

Sätze über die aus K zusammengesetzten Kerne (IX. S. 67—70).

Ausdehnung auf unstetige Kerne (XV. S. 204; IX. S. 68).

Zusammenfassung zweier simultaner Integralgleichungen in eine Integralgleichung (XVI. S. 210).

10. *Orthogonale lineare Integralgleichung.* In gleicher Weise liefern die Sätze von 5. die Theorie der Integralgleichung mit stetigem *symmetrischen Kern* $K(s, t) = K(t, s)$ und einem Parameter λ (XIV. S. 185—194).

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Jeder nicht identisch verschwindende Kern $K(s, t)$ hat mindestens einen „*Eigenwert*“ λ, für den die zugehörige homogene Integralgleichung ($f = 0$) eine nicht identisch verschwindende Lösung, die zugehörige „*Eigenfunktion*“, besitzt. (XIV. S. 188; zum ersten Male bewiesen III. S. 16.) Jeder Eigenwert hat endliche Vielfachheit, d. h. es gibt nur endlich viele zugehörige linear unabhängige Eigenfunktionen. Falls der stetige Kern $K(s, t)$ nicht eine Summe von endlich vielen Produkten $\varphi_p(s)\varphi_p(t)$ ist, so gibt es unendlich viele Eigenwerte, die sich nur gegen ∞ häufen (XIV. S. 192; IV. S. 22). Ist λ kein Eigenwert, so hat die homogene Integralgleichung keine, die unhomogene eine und nur eine Lösung, die sich durch eine, vom Parameter λ analytisch abhängende „*Resolvente*“ $\mathsf{K}(s, t; \lambda)$ in der Form

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \mathsf{K}(s, t; \lambda) f(t)\, dt$$

ausdrückt (II. S. 12).

Das zugehörige „*Gaußsche*“ *Variationsproblem*: das Maximum der Werte, die das Doppelintegral

$$J(u) = \int_a^b \int_a^b K(s,t)u(s)u(t)\,ds\,dt,$$

die „*quadratische Integralform*“, für alle der Bedingung

$$\int_a^b (u(s))^2 ds = 1$$

genügenden stetigen Funktionen u annimmt, ist gleich dem kleinsten positiven Eigenwert, die zugehörige Funktion u ist irgend eine der zum betreffenden Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen; die weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen erhält man, indem man zu diesem Variationsproblem noch sukzessive lineare Nebenbedingungen hinzufügt (XIV. S. 193; V. S. 28—30). Ist stets $J(u) > 0$, so heißt der Kern *definit*. Alle Eigenwerte sind dann positiv (V. S. 28).

Die sämtlichen Eigenfunktionen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... bilden ein orthogonales Funktionensystem (XIV. S. 187); unter Umständen ist es zugleich ein vollständiges (XIV. S. 193—194).

Jede durch Vermittlung einer stetigen Funktion g in der Gestalt

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)g(t)\,dt$$

darstellbare Funktion $f(s)$ läßt sich auf Fouriersche Weise in eine nach den Eigenfunktionen φ_1, φ_2, ... fortschreitende, gleichmäßig und absolut konvergente Reihe

$$f(s) = \sum_{(p)} c_p \varphi_p(s) = \sum_{(p)} \varphi_p(s) \int_a^b f(s)\varphi_p(s)\,ds$$

$$= \sum_{(p)} \frac{\varphi_p(s)}{\lambda_p} \int_a^b g(s)\varphi_p(s)\,ds$$

entwickeln. (XIV. S. 190.) Speziellere Entwicklungssätze über „*abgeschlossene*“ und „*allgemeine*“ Kerne. (IV. S. 24—25.)

Die quadratische Integralform $J(u)$ gestattet für alle stetigen Funktionen $u(s)$ die Entwicklung

$$J(u) = \sum_{(p)} \frac{1}{\lambda_p} \left(\int_a^b u(s)\varphi_p(s)\,ds \right)^2;$$

dieselbe konvergiert für alle $u(s)$, für die $\int_a^b u^2 ds$ unterhalb einer Schranke bleibt, absolut und gleichmäßig. (III., S. 19—20.)

Ableitung dieser Theorie unabhängig von der Theorie der Funktionen unendlich vieler Variabeln durch Grenzübergang vom entsprechenden algebraischen Problem aus (III. S 13—21; das algebraische Problem: I. S. 4—8). Darstellung der Resolvente $\mathsf{K}(s, t; \lambda)$ als Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen von λ, d. h. die *Fredholmschen Formeln* (II. S. 11—13). Ergänzung betreffend mehrfache Eigenwerte (VI. S. 35—38).

Ausdehnung auf unstetige Kerne (VI. S. 30—35); (XV. S. 204).

Anwendung der Theorie auf die adjungierten Eigenfunktionen eines unsymmetrischen Kernes (XIV. S. 194).

11. *Polare lineare Integralgleichungen.*

Entwicklung der analogen Eigenwert- und Eigenfunktionentheorie für die Integralgleichung

$$f(s) = V(s)\varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

wo $V(s)$ stückweise $+1$ oder -1 ist und $K(s, t)$ einen symmetrischen positiv-definiten Kern bedeutet (XV. S. 195—204).

C. Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

12. *Die Greensche Formel.*

Für die allgemeinste sich selbst adjungierte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) + qu = 0 \qquad (p > 0)$$

lautet die Greensche Formel, wie folgt (VII. S. 40):

$$\int_a^b \{vL(u) - uL(v)\}\,dx = \left[p\,\left\{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}\right\}\right]_a^b.$$

Die *Grundlösung* $\gamma(x, \xi)$ ist in bezug auf x zweimal stetig differenzierbar und genügt für alle von ξ verschiedenen Werte x innerhalb des Intervalles a bis b der Gleichung $L(u) = 0$; für $x = \xi$ ist sie stetig, während ihre erste Ableitung den Abfall -1 aufweist. Sind $u_1(x)$, $u_2(x)$ zwei unabhängige Lösungen von $L(u) = 0$, so stellt sich eine Grundlösung in der Gestalt dar:

$$\gamma(x, \xi) = -\frac{1}{2}\,\frac{|x-\xi|}{x-\xi}\,\frac{u_2(\xi)u_1(x) - u_1(\xi)u_2(x)}{u_2(\xi)\dfrac{du_1(\xi)}{d\xi} - u_1(\xi)\dfrac{du_2(\xi)}{d\xi}}$$

(VII. S. 40).

13. *Randbedingungen.*

Es kommen fünf Arten von homogenen Randbedingungen in Betracht (VII. S. 41—42):

I. $f(a) = 0, \quad f(b) = 0;$

II. $\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a} = 0, \quad \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=b} = 0;$

III. $\left[\frac{df(x)}{dx} + hf\right]_{x=a} = 0, \quad \left[\frac{df(x)}{dx} + kf\right]_{x=b} = 0;$

IV. $f(a) = hf(b), \ p(a)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = \frac{p(b)}{h}\left[\frac{df(x)}{ax}\right]_{x=b};$

IV*. $f(a) = hp(b)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b}, \quad p(a)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = -\frac{1}{h}f(b);$

V. $f(x)$ soll in der Nähe des Randpunktes $x = a$ sich in der Form $(x-a)^r\, e(x)$ darstellen lassen, wo $e(x)$ eine für $x = a$ endlich bleibende Funktion bedeutet;

V*. $f(x)$ soll bei der Annäherung an den Randpunkt $x = a$ endlich bleiben.

14. *Die Greensche Funktion* $G(x, \xi)$.

Eine Grundlösung $g(x, \xi)$ für das Intervall (a, b), die in bezug auf x und identisch in ξ an den Randpunkten zwei homogene Randbedingungen befriedigt, heißt die zu diesen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung $L(u) = 0$; ferner heißt der Quotient $G(x, \xi) = \frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$ die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ (VII. S. 42—43).

Wenn eine Greensche Funktion nicht existiert, so besitzt die Differentialgleichung $L(u) = 0$ eine nicht identisch verschwindende stetig differenzierbare Lösung $\psi^0(x)$, die die betreffenden Randbedingungen erfüllt. Wir konstruieren dann ein Integral $g(x, \xi)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u) = p(\xi)\psi^0(x)\psi^0(\xi), \qquad \int_a^b \psi^0(x)^2 dx = 1,$$

dessen Ableitung an der Stelle $x = \xi$ den Abfall -1 erfährt, das an den Randpunkten die Randbedingungen erfüllt und die Gleichung

$$\int_b^a g(x, \xi)\psi^0(x)\,dx = 0$$

befriedigt. Die Funktionen $g(x, \xi)$ und $\frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$ werden als *Greensche Funktionen im erweiterten Sinne* bezeichnet. (VII. S. 44—45, XVIII. S. 233.)

Das Symmetriegesetz der Greenschen Funktion $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ (VII. S. 45).

15. *Die Lösung der Randwertaufgabe.*

Die Integralgleichung erster Art

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

wird durch die Formel

$$\varphi(x) = - Lf((x))$$

gelöst; und umgekehrt gibt die Integralgleichung dasjenige Integral $f(x)$ der Differentialgleichung, das dieselben Randbedingungen wie $G(x, \xi)$ erfüllt (VII. S. 45—47).

Die lösende Funktion der Integralgleichung

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

ist gleich der zu denselben Randbedingungen wie G gehörigen Greenschen Funktion des Differentialausdruckes

$$\varLambda(u) = L(u) + \lambda u.$$

(VII. S. 47—49.)

16. *Eigenwert- und Eigenfunktionentheorie der Differentialgleichung.*

Die Differentialgleichung $\varLambda(u) = 0$ besitzt unendlich viele *Eigenwerte*, d. h. es gibt unendlich viele Werte des Parameters λ, für die die Differentialgleichung $L(u) + \lambda u = 0$ eine nicht identisch verschwindende Lösung, die zugehörige *Eigenfunktion*, besitzt, die an den Randpunkten die betr. homogenen Randbedingungen erfüllt (VII. S. 49—50).

Sind $\psi^{(1)}(x)$, $\psi^{(2)}(x)$, ... die zu irgend welchen Randbedingungen gehörigen Eigenfunktionen von $\varLambda(u) = 0$, so folgt für jede stetige Funktion $h(x)$ aus

$$\int_a^b h(x) \psi^{(m)}(x) dx = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

stets, daß $h(x)$ identisch Null ist (VII. S. 50).

Jede zweimal stetig differenzierbare und den Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ ist auf die Fouriersche Weise in eine nach den Eigenfunktionen fortschreitende gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar (VII. S. 51).

Übertragung der Resultate auf die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + (q(x) + \lambda k(x))u = 0,$$

wobei $k(x) > 0$ ist. Beispiele. (2. S. 51—56.)

Differentialgleichungen, für die nur eine Greensche Funktion im erweiterten Sinne existiert, und der zugehörige Entwicklungssatz. Beispiele. (VII. S. 55—56.)

17. *Allgemeine Differentialgleichungen.*

Mittelst der Theorie der polaren Integralgleichungen werden die sämtlichen Resultate auf die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + (q(x) + \lambda\, k(x))u = 0 \;\; (p > 0)$$

ausgedehnt, wobei $k(x)$ eine endliche Anzahl von Malen sein Vorzeichen ändert. Existenz von unendlich vielen Eigenwerten (XVI. S. 205—206).

18. *Systeme von simultanen Differentialgleichungen.*

Aus dem Variationsproblem

$$\int_a^b Q(u'_1, u'_2, u_1, u_2)\,dx = \text{Min.},$$

wo

$$Q = p_{11}(x)u'^2_1 + 2p_{12}u'_1u'_2 + p_{22}u'^2_2 + 2q_{11}u'_1u_1 + 2q_{12}u'_1u_2 + 2q_{21}u'_2u_1 + 2q_{22}u'_2u_2 + r_{11}u_1^2 + 2r_{12}u_1u_2 + r_{22}u_2^2,$$

entspringen die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung (XVI. S. 206 bis 207):

$$L_1(u_1, u_2) \equiv \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Q}{\partial u'_1}\right) - \frac{\partial Q}{\partial u_1}\right) = 0, \quad L_2(u_1, u_2) \equiv \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Q}{\partial u'_2}\right) - \frac{\partial Q}{\partial u_2}\right) = 0.$$

Die *Greensche Formel* für diese Differentialgleichungen (XVI. S. 207):

$$\int_a^b (v_1L_1(u) - u_1L_1(v) + v_2L_2(u) - u_2L_2(v))\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[v_1\frac{\partial Q}{\partial u'_1} - u_1\frac{\partial Q}{\partial v'_1} + v_2\frac{\partial Q}{\partial u'_2} - u_2\frac{\partial Q}{\partial v'_2}\right]_a^b.$$

Das *Greensche Funktionensystem* für diese Differentialgleichungen ist ein System von Funktionen:

$$G_{11}(x, \xi),\ G_{12}(x, \xi),$$
$$G_{21}(x, \xi),\ G_{22}(x, \xi),$$

die paarweise die Differentialgleichungen $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ sowie die Randbedingungen in bezug auf x befriedigen, und deren Ableitungen für $x = \xi$ einen gegebenen Abfall erfahren. (XVI. S. 207—208.)

Das *Symmetriegesetz* dieses Funktionensystems lautet: (XVI. S. 208)

$$G_{11}(x, \xi) = G_{11}(\xi, x),$$
$$G_{12}(x, \xi) = G_{21}(\xi, x),$$
$$G_{22}(x, \xi) = G_{22}(\xi, x).$$

Die Lösung der *Randwertaufgabe:* diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$L_1(f_1, f_2) = -\varphi_1, \quad L_2(f_1, f_2) = -\varphi_2,$$

die bestimmte homogene Randbedingungen erfüllen, werden durch

$$f_1(x) = \int_a^b \{G_{11}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + G_{12}(x, \xi)\varphi_2(\xi)\}\,d\xi,$$

$$f_2(x) = \int_a^b \{G_{21}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + G_{22}(x, \xi)\varphi_2(\xi)\}\,d\xi$$

dargestellt, und umgekehrt, diese Integralgleichungen erster Art werden durch jene Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ gelöst. (XVI. S. 208.)

Eigenwert- und Eigenfunktionentheorie: diejenigen Funktionenpaare $u_1(x)$, $u_2(x)$, die an den Randpunkten homogene Randbedingungen erfüllen und das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv L_1(u_1, u_2) + \lambda\ (k_{11}(x)u_1 + k_{12}(x)u_2) = 0, \\ A_2 &\equiv L_2(u_1, u_2) + \lambda\ (k_{21}(x)u_1 + k_{22}(x)u_2) = 0 \end{aligned}$$

befriedigen, sind Eigenfunktionen der Integralgleichungen:

$$u_1(x) = \lambda \int_a^b \{ G_{11}(x, \xi)(k_{11}u_1 + k_{12}u_2) + G_{12}(x, \xi)(k_{21}u_1 + k_{22}u_2)\}\, d\xi,$$

$$u_2(x) = \lambda \int_a^b \{ G_{21}(x, \xi)(k_{11}u_1 + k_{12}u_2) + G_{22}(x, \xi)(k_{21}u_1 + k_{22}u_2)\}\, d\xi.$$

(XVI. S. 209—211.) Die Existenz unendlich vieler Eigenwerte und Eigenfunktionen; Entwicklungssätze. (XVI. S. 211.)

Greensche Funktionen im erweiterten Sinne (XVI. S. 211—212).

19. *Eine zweiparametrige Randwertaufgabe (Kleins Oszillationstheorem).* Treten in den Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda a + \mu b)\, y = 0,$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\pi\,\frac{d\eta}{d\xi}\right) - (\lambda \alpha + \mu \beta)\, \eta = 0$$

$$(p(x) > 0,\ a(x) > 0,\ \text{für } x_1 \leqq x \leqq x_2)$$
$$(\pi(\xi) > 0,\ \alpha(\xi) > 0,\ \text{für } \xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2)$$

die Parameter λ, μ nicht bloß in der Verbindung $\lambda + C\mu$ auf ($C = \text{const.}$) auf, so existieren unendlich viele Paare von Werten λ, μ, für welche das Differentialgleichungssystem ein Lösungssystem $y_h(x)$, $\eta_h(\xi)$ besitzt, derart daß $y_h(x)$ an den Enden und nicht überall im Inneren des Intervalles x_1, x_2, $\eta_h(\xi)$ an den Enden und nicht überall im Inneren des Intervalles ξ_1, ξ_2 verschwindet; zugehöriger Entwicklungssatz. (XXI. S. 262—267.)

D. Anwendung auf partielle Differentialgleichungen.

20. *Die Greensche Formel.*

Für die allgemeinste sich selbst adjungierte Differentialgleichung zweiter Ordnung von elliptischem Typus

$$L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu = 0,\ (p > 0)$$

lautet die Greensche Formel, wie folgt (VIII. S. 59):

$$\int_{(J)} \{vL(u) - uL(v)\}\, dJ = \int_{(C)} p\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

wo J ein Gebiet der xy-Ebene mit der Randkurve C ist.

Die *Grundlösung* ist eine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ von der Gestalt

$$\gamma(x, y;\ \xi, \eta) = \gamma_1(x, y;\ \xi, \eta)\, l \log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \gamma_2(x, y;\ \xi, \eta),$$

wobei γ_1, γ_2 zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind, und außerdem identisch in ξ, η

$$\gamma_1(\xi, \eta;\ \xi, \eta) = 1$$

ist (VIII. S. 59—60).

21. *Randbedingungen.*

Es kommen fünf Arten von Randbedingungen in Betracht (VIII. S. 60 bis 61):

I. $f(x, y) = 0$ für alle Punkte x, y der Randkurve C;

II. $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ „ „ „ „ „ „ ;

III. $\frac{\partial f}{\partial n} + hf = 0$ „ „ „ „ „ „ ;

IV. $(f(x, y))_s = (f(x, y))_{s+\frac{l}{2}}$, $\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_s = -\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{s+\frac{l}{2}}$ für alle s,

wobei s die Bogenlänge von einem beliebigen Punkte von C, l die Gesamtlänge bedeutet;

V. $f(x, y)$ soll bei der Annäherung an die Randkurve endlich bleiben.

22. *Greensche Funktion.*

Eine Grundlösung $g(x, y;\ \xi, \eta)$, die als Funktion von x, y identisch in η, ξ an der Randkurve C eine homogene Randbedingung befriedigt, heißt Greensche Funktion der Differentialgleichung $L(u) = 0$; ferner heißt der Quotient $\frac{g(x, y;\ \xi, \eta)}{p(\xi, \eta)}$ die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$. (VIII. S. 61.) Symmetriegesetz der Greenschen Funktion. (VIII. S. 62.)

Greensche Funktion im erweiterten Sinne. (XVIII. S. 233.)

23. *Die Lösung der Randwertaufgabe.*

Die Integralgleichung erster Art

$$f(x, y) = \int_{(J)} G(xy, \xi\eta)\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

wird durch die Funktion

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} L(f(x, y))$$

gelöst; umgekehrt stellt $f(x, y)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung dar, die denselben Randbedingungen genügt wie $G(xy;\ \xi\eta)$. (VIII. S. 62.)

Die lösende Funktion der Integralgleichung

$$f(x, y) = \varphi(x, y) - \lambda \int_{(J)} G(xy;\ \xi\eta)\varphi(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta$$

ist die zu den nämlichen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$\Delta(u) = (Lu) + \lambda u = 0.$$

Beweis der Existenz der Greenschen Funktion und der Lösbarkeit der Randwertaufgabe bei den Randbedingungen I und II (IX. S. 70—77). Existenz der Greenschen Funktion für die Randbedingung III (IX. S. 78).

Andere Beispiele. Die sich gegenseitig auflösenden Integralgleichungen erster Art:

$$u(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} v(x) \operatorname{cotg}\left(\pi \frac{x-\xi}{2}\right) dx$$

$$v(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} u(x) \operatorname{cotg}\left(\pi \frac{x+\xi}{2}\right) dx.$$

(IX. S. 75.)

24. *Eigenwert- und Eigenfunktionentheorie der partiellen Differentialgleichung.*

Es gibt abzählbar unendlichviele reelle Werte — die Eigenwerte — des Parameters λ, für die die Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda u = 0$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung — die Eigenfunktion — besitzt und die auf einer geschlossenen Randkurve homogene Randbedingungen erfüllt (VIII. S. 63); jede willkürliche Funktion ist auf die Fouriersche Weise in eine nach diesen Eigenfunktionen fortschreitende gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar. (VIII. S. 64.)

Auftreten eines Parameters in der Randbedingung. Es gibt unendlich viele Werte λ, bei denen die vorgelegte Differentialgleichung $L(u) = 0$ eine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt, die der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0$$

genügt; der zugehörige Entwicklungssatz (IX. S. 77—80).

25. *Allgemeinere partielle Differentialgleichungen.*

Verallgemeinerung auf partielle Differentialgleichungen, die zu Gebieten auf einer beliebigen krummen Fläche (statt zu ebenen Gebieten) gehören (VIII. S. 64—65).

Die Randwertaufgabe für das folgende System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung von elliptischem Typus:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = pu + qv,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = ku + lv.$$

Wenn diese Differentialgleichungen außer $u = 0$, $v = 0$, kein Lösungssystem u, v besitzen, derart, daß u auf der gegebenen geschlossenen Randkurve C verschwindet, so besitzen sie ein Lösungssystem u, v derart, daß u auf C die vorgeschriebenen Werte $f(s)$ annimmt; im entgegengesetzten Falle existiert ein solches Lösungssystem dann und nur dann, wenn $f(s)$ gewissen, endlichvielen Integralbedingungen genügt (XVII. S. 213 bis 219).

Definition des *auf der Vollkugel regulären Differentialausdruckes;* seine Transformation und der adjungierte Differentialausdruck. (XVIII. S. 219 bis 223.) Die Methode der *Parametrix.* Die Parametrix ist eine symmetrische Funktion des Argumentpunktes s, t und des Parameterpunktes σ, τ auf der Kugel, die in allen 4 Veränderlichen beliebig oft differenzierbar ist, außer wenn Parameterpunkt und Argumentpunkt zusammenfallen, in welchem Falle sie in bestimmter Weise logarithmisch unendlich wird (XVIII. S. 223—224). Konstruktion der Parametrix einer auf der Vollkugel regulären Differentialgleichung und Nachweis ihrer Eigenschaften (XVIII. S. 224—226). Wenn die auf der Vollkugel reguläre Differentialgleichung vom elliptischen Typus $L(z) = 0$ keine von Null verschiedene, auf der ganzen Kugel stetige Lösung besitzt, so hat die Differentialgleichung $L(z) = f$, wo f irgend eine gegebene Funktion auf der Kugel bedeutet, stets eine solche Lösung. Verallgemeinerung dieses Satzes für den Fall, daß $L(z) = 0$ solche Lösungen besitzt (XVIII. S. 226—232). Konstruktion der Greenschen Funktion, d. h. einer Parametrix, die die vorgelegte Differentialgleichung befriedigt. (XVIII. S. 232—234.) Beweis der Existenz der Greenschen Funktion im „erweiterten Sinne". (XVIII. S. 233.) Es gibt unendlichviele Werte von λ, derart daß $L(z) + \lambda z = 0$ eine auf der Vollkugel stetige Lösung, die zu diesem „Eigenwerte" gehörige „Eigenfunktion", besitzt; jede willkürliche Funktion ist nach diesen Eigenfunktionen auf die Fouriersche Weise entwickelbar. (XVIII. S. 234—235.) Die sich selbst adjungierte elliptische Differentialgleichung $L(z) + \lambda z = 0$ hat nur eine endliche Anzahl negativer Eigenwerte (XVIII. S. 235—237).

Hängen die Koeffizienten in $L(z) = 0$ von einem Parameter μ analytisch ab, so ist der h-te Eigenwert eine stetige Funktion von μ (XVIII. S. 238—241).

Mittelst der Theorie der polaren Integralgleichungen werden die sämtlichen in 23., 24. erwähnten Resultate auf die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + (q + \lambda k)u = 0$$

ausgedehnt, wobei $k(x, y)$ in einer endlichen Anzahl von Teilgebieten verschiedene Vorzeichen besitzt (XVI. S. 206).

E. Anwendung auf die Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln.

26. *Allgemeines Riemannsches Problem.*

Formulierung desselben: man soll Funktionen einer komplexen Variablen bestimmen, wenn zwischen den Real- und Imaginärteilen der Funktionen auf einer gegebenen geschlossenen Randkurve C gegebene Relationen gelten sollen. Man bezeichne die Greenschen Funktionen zweiter Art der Potentialgleichung $\Delta(u) = 0$ für das Innere und Äußere der Kurve C bzw. mit $G_j(x, y; \xi, \eta)$ und $G_a(x, y; \xi, \eta)$ und definiere dann zwei *Integralausdrücke*, wie folgt

$$M_j w = \frac{i}{2\pi} \int_{(C)} \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} w(\sigma) d\sigma,$$

$$M_a w = \frac{i}{2\pi} \int_{(C)} \frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} w(\sigma) d\sigma,$$

wobei $w(\sigma)$ irgend einen komplexen Ausdruck auf der Kurve C bedeutet. Die Bedingung dafür, daß ein auf C definierter komplexer Ausdruck $f_j(s)$ die Randwerten einer innerhalb C regulären Funktion darstellt, ist

$$f_j(s) = M_j f_j + \frac{1}{l} \int_{(C)} f_j(\sigma) d\sigma,$$

wobei l die Gesamtlänge der Kurve C bezeichnet; ein analoger Satz gilt für die Operation $M_a w$ und das Äußere von C. Die Ausdrücke

$$w + M_j w \text{ bzw. } w - M_a w$$

stellen stets Randwerte einer innerhalb bzw. außerhalb C regulären Funktion dar. (X. S. 81—88.)

Durch die erlangten Hilfsmittel wird der Satz bewiesen, daß, wenn $c(s)$ ein gegebener stetiger komplexer Ausdruck auf der Kurve C ist und $\bar{c}(s)$ den konjugierten Ausdruck bedeutet, entweder ein Paar von Funktionen $f_j(z)$, $f_a(z)$ existiert, von denen die erstere innerhalb, die zweite außerhalb C regulär analytisch ist und welche auf C die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

erfüllen, oder ein Funktionenpaar $g_j(z)$ und $g_a(z)$ von demselben Charakter, deren Randwerte die Relation

$$g_a(s) = \bar{c}(s) g_j(s)$$

erfüllen (X. S. 89—91). Von diesen beiden Fällen tritt der erste bzw. der zweite ein, je nachdem $\log c(s)$ beim Umlauf in positivem Sinne entlang C eine negative bzw. positive Änderung erfährt (X. S. 91).

Es gibt stets ein Paar von Funktionen $f_a(z)$, $f_j(z)$, von denen die erste außerhalb C, die zweite innerhalb C den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, während auf C die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

erfüllt ist (X. S. 91—92).

Untersuchung des Falles, wo $c(s)$ an einer endlichen Anzahl von Stellen eine Unterbrechung der Stetigkeit aufweist (X. S. 92—94).

Aufstellung der Aufgabe: zwei außerhalb C und zwei innerhalb C reguläre analytische Funktionen f_a, f'_a bzw. f_j, f'_j, sollen so bestimmt werden, daß sie auf C die Relationen

$$\begin{aligned} f_a(s) &= c_1(s) f_j(s) + c_2(s) f'_j(s) \\ f'_a(s) &= c'_1(s) f_j(s) + c'_2(s) f'_j(s) \end{aligned}$$

erfüllen, wobei c_1, c_2, c'_1, c'_2 gegebene komplexe zweimal stetig differenzierbare Ausdrücke in s sind, deren Determinante

$$c_1 c'_2 - c_2 c'_1$$

für alle s von Null verschieden ausfällt (X. S. 94—95).

Es wird bewiesen, daß entweder die genannte Aufgabe eine Lösung besitzt, oder zwei Funktionenpaare g_a, g'_a, g_j, g'_j existieren, die auf C die Relationen

$$\begin{aligned} g_a &= \bar{c}_1 g_j + \bar{c}_2 g'_j \\ g'_a &= \bar{c}'_1 g_j + \bar{c}'_2 g'_j \end{aligned}$$

erfüllen, wobei $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}'_1$, $\bar{c}'_2$ die zu den gegebenen Ausdrücken c_1, c_2, c'_1, c'_2 konjugiert komplexen Ausdrücke bedeuten. (X. S. 95—98.)

Die Randwerte der soeben konstruierten Funktionen f_a, f'_a, f_j, f'_j bzw. g_a, g'_a, g_j, g'_j sind auf C stetig differenzierbare Funktionen von s, und die gestellte Aufgabe besitzt nur eine endliche Anzahl linear voneinander unabhängiger Systeme von Lösungen. (X. S. 98—100.)

Beweis des Satzes, daß es stets Funktionen f_a, f'_a, f_j, f'_j gibt, die innerhalb bzw. außerhalb C regulär analytisch sind mit etwaiger Ausnahme einer Stelle innerhalb C, die für eine der Funktionen f_j, f'_j oder für beide ein Pol ist, und die auf C die Relationen

$$\begin{aligned} f_a &= c_1 f_j + c_2 f'_j \\ f'_a &= c'_1 f_j + c'_2 f'_j \end{aligned}$$

erfüllen (X. S. 100—102.)

27. *Das Riemannsche Gruppenproblem.*

Das speziellere Riemannsche Problem, die Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe zu beweisen, ist für Differentialgleichungen zweiter Ordnung äquivalent mit der folgenden Aufgabe: man verbinde die gegebenen singulären Punkte $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots z^{(m)}$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung durch eine reguläre analytische

Kurve C; dann sollen zwei Funktionenpaare f_a, f'_a bzw. f_j, f'_j bestimmt werden, die außerhalb bzw. innerhalb C vom Charakter rationaler Funktionen sind, derart, daß ihre Randwerte auf C überall stetig sind und auf dem Kurvenstücke zwischen $z^{(h)}$ und $^{h+1)}$ $(h = 1, 2 \ldots m)$ die Relationen

$$f_a = \gamma_1^{(h)} f_j + \gamma_2^{(h)} f'_j$$
$$f'_a = \gamma'^{(h)}_1 f_j + \gamma'^{(h)}_2 f'_j$$

erfüllen, wobei $\gamma_1^{(h)}$, $\gamma_2^{(h)}$, $\gamma'^{(h)}_1$, $\gamma'^{(h)}_2$ gegebene Konstante mit nicht verschwindender Determinante sind. (X. S. 102—104.)

Diese Aufgabe wird durch Einführung neuer Funktionen auf die in 26. am Schluß gelöste (wo die Substitutionskoeffizienten stetige Funktionen des Ortes sind) zurückgeführt (X. S. 104—106).

Durchführung des Existenzbeweises (Riemannsches Gruppenproblem) (X. S. 106—108).

28. *Problem aus der Theorie der automorphen Funktionen.*

Automorphe Funktionen mit reeller Substitution, die vier gegebene Werte ∞, a, b, c auslassen. Beweis des Satzes: es gibt unendlichviele Werte λ, so daß der Quotient zweier Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left((x-a)(x-b)(x-c)\frac{dy}{dx}\right) + (x+\lambda)y = 0$$

beim Umlauf der Variabeln x um die singulären Stellen a, b, c Substitutionen mit reellen Koeffizienten erfährt. (XX. S. 258—262.)

F. Anwendung auf Variationsrechnung, Geometrie, Hydrodynamik und Gastheorie.

29. *Variationsprobleme.*

Zusammenhang zwischen dem *Dirichletschen* Variationsproblem

$$\int_a^b \left[p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - qu^2\right]dx = \text{Min.}$$

bei der Nebenbedingung

$$\int_a^b u^2 dx = 1$$

und dem *Gaußschen* Variationsproblem (s. oben, 10)

$$\int_a^b\int_a^b G(x, \xi)\,\omega(x)\,\omega(\xi)\,dx\,d\xi = \text{Max.}$$

bei der Nebenbedingung

$$\int_a^b \omega^2 dx = 1.$$

(VII. S. 56—58.) Das gleiche Problem für zwei unabhängige Variable. (VIII. S. 66.)

Das *Dirichletsche Variationsproblem auf der Kugel:* das absolute Minimum des über die Vollkugel erstreckten Integrals

$$D(z) = \int \frac{a z_s^2 + 2 b z_s z_t + c z_t^2 - n z^2}{\sqrt{eg - f^2}}$$

bei der Nebenbedingung

$$\int z^2 dk = 1$$

ist gleich dem kleinsten Eigenwert der Differentialgleichung

$$L(z) \equiv \frac{a z_{ss} + 2 b z_{st} + c z_{tt} + (a_s + b_t) z_s + (b_s + c_t) z_t + n z}{\sqrt{eg - f^2}} + \lambda z = 0$$

Verallgemeinerung dieses Satzes. (XVIII. S. 237—238.)

30. *Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche.*

Das Volumen V eines konvexen Körpers K ist

$$V = \tfrac{1}{6} \int H(H, H) dk,$$

wobei $H(\alpha, \beta, \gamma)$ diejenige auf der Kugel definierte homogene Funktion bedeutet, die die Entfernung der Tangentialebene des Körpers vom Nullpunkt mit den Richtungskosinus α, β, γ angibt, und wobei allgemein für zwei beliebige homogene Funktionen $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$

$$(W, V) = \frac{W_{yy} V_{zz} - 2 W_{yz} V_{yz} + W_{zz} V_{yy}}{x^2}$$

$$= \frac{W_{zz} V_{xx} - 2 W_{zx} V_{zx} + W_{xx} V_{zz}}{y^2}$$

$$= \frac{W_{xx} V_{yy} - 2 W_{xy} V_{xy} + W_{yy} V_{xx}}{z^2}$$

gesetzt ist. (XIX. S. 242—245.) Das gemischte Volumen dreier konvexer Körper

$$V_{123} = \tfrac{1}{6} \int H_1(H_2, H_3) dk$$

und ihre Symmetrieeigenschaften. (XIX. S. 245.)

Ist H eine gegebene homogene Funktion, so stellt

$$L(\Omega) = (W, H), \quad W(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, \Omega(x, y, z)$$

einen für Ω linearen Differentialausdruck auf der Kugel dar, der sich selbst adjungiert und vom elliptischen Typus ist. (XIX. S. 245—247.)

Beweis der Sätze: Jede auf der Vollkugel stetige Lösung von $L(\Omega) = 0$ ist eine lineare Kombination der drei Lösungen

$$\Omega = x, \quad \Omega = y, \quad \Omega = z.$$

(XIX. S. 247—250.) Die partielle Differentialgleichung

$$L(\Omega) + \lambda \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} \Omega = 0, \quad (H = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, \mathsf{H})$$

besitzt $\lambda = -1$ als einfachen, $\lambda = 0$ als dreifachen Eigenwert, und die zugehörigen Eigenfunktionen sind H bzw. x, y, z; die übrigen Eigenwerte sind positiv. (XIX. 250—254.)

Beweis der Minkowskischen Ungleichung

$$V(H, H, G)^2 \geqq V(H, H, H)\, V(H, G, G),$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann statthat, wenn der eine Körper aus dem anderen durch Parallelverschiebung und Ähnlichkeitstransformation hervorgeht. (XIX. S. 254—257.)

Die Ungleichungen:

$$O^2 \geqq 3VM, \quad M^2 \geqq 4\pi O, \quad O^2 \geqq 36\pi V^2,$$

wobei O die Oberfläche, V das Volumen und

$$M = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) d\omega$$

die mittlere Krümmung eines konvexen Körpers bedeutet, und das Gleichheitszeichen nur statthaft, wenn der konvexe Körper die Kugel ist. (XIX. S. 257—258.)

31. *Ein Problem der Hydrodynamik.*

Anwendung des Entwicklungssatzes in 23. (Parameter λ in der Randbedingung) auf das Problem der kleinen Schwingungen einer der Schwere unterworfenen Flüssigkeit. (IX. S. 80—81.)

32. *Begründung der Gastheorie.*

Aus der Maxwell-Boltzmannschen Stoßformel entspringt eine lineare (orthogonale) Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern; diese spielt beim Aufbau der Gastheorie die fundamentale Rolle, indem sie die Lösung der Stoßformel durch sukzessive Approximationen ermöglicht. (S. 268 ff.)

Inhalt.

Sechster Abschnitt.

Anwendung der Theorie auf verschiedene Probleme der Analysis, Geometrie und Gastheorie.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Theorie der linearen Integralgleichungen.

Es sei $K(s, t)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s, t; $f(s)$ sei eine gegebene Funktion von s und $\varphi(s)$ werde als die zu bestimmende Funktion von s angesehen; jede der Veränderlichen s, t möge sich in dem Intervalle a bis b bewegen: dann heiße

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

eine *Integralgleichung erster Art* und

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

eine *Integralgleichung zweiter Art*; dabei bedeutet λ einen Parameter. Die Funktion $K(s, t)$ heiße der *Kern der Integralgleichung*.

Durch die Randwertaufgabe in der Potentialtheorie wurde zuerst Gauß auf eine besondere Integralgleichung geführt; die Benennung „Integralgleichung“ hat bereits P. du Bois-Reymond[1]) angewandt. Die erste Methode zur Auflösung der Integralgleichung zweiter Art rührt von C. Neumann[2]) her; dieser Methode zufolge erscheint die Funktion $\varphi(s)$ direkt als eine unendliche Reihe, die nach Potenzen des Parameters λ fortschreitet und deren Koeffizienten gewisse durch mehrfache Integrale definierte Funktionen von s sind. Eine andere Formel zur Auflösung der Integralgleichung zweiter Art fand Fredholm[3]), indem es ihm gelang, $\varphi(s)$ als Bruch darzustellen, dessen Zähler eine beständig konvergente Potenzreihe in λ mit gewissen von s abhängigen Koeffizienten ist, während als Nenner eine beständig konvergente Potenzreihe in λ mit numerischen Koeffizienten auftritt. Den direkten Nachweis der Übereinstimmung der

1) Bemerkungen über $\Delta z = 0$. Journ. f. Math. Bd. 103 (1888).

2) Über die Methode des arithmetischen Mittels. Leipz. Abh. Bd. 13 (1887).

3) Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta mathematica Bd. 27 (1903), und die daselbst zitierte Abhandlung über denselben Gegenstand aus dem Jahre 1899.

Formeln von C. Neumann und Fredholm erbrachte auf meine Anregung hin Kellogg[1]). In dem besonderen Falle gewisser Randwertaufgaben in der Potentialtheorie hat Poincaré[2]) als der Erste den Parameter λ eingeführt, und ihm gelang es auch zuerst nachzuweisen, daß die Lösung notwendig als Quotient zweier beständig konvergenter Potenzreihen in λ darstellbar sein muß. Eine dritte Methode zur Lösung der Integralgleichung zweiter Art, die auch zugleich auf die Integralgleichung erster Art anwendbar ist, werde ich in Kapitel XIII auseinandersetzen. Die Auflösung besonderer Integralgleichungen gelang Volterra[3]). In gewissen Fällen läßt sich die Integralgleichung erster Art auf die zweiter Art nach einer von mir angegebenen Methode[4]) zurückführen.

Die nähere Beschäftigung mit dem Gegenstande führte mich zu der Erkenntnis, daß der systematische Aufbau einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen für die gesamte Analysis, insbesondere für die Theorie der bestimmten Integrale und die Theorie der Entwicklung willkürlicher Funktionen in unendliche Reihen, ferner für die Theorie der linearen Differentialgleichungen und der analytischen Funktionen sowie für die Potentialtheorie und Variationsrechnung von höchster Bedeutung ist. Ich beabsichtige in diesem Buche die Frage nach der Lösung der Integralgleichungen zu behandeln, vor allem aber den Zusammenhang und die allgemeinen Eigenschaften der Lösungen aufzusuchen, wobei ich meist die für meine Resultate wesentliche Voraussetzung mache, daß der Kern $K(s,t)$ der Integralgleichung eine *symmetrische* Funktion der Veränderlichen s, t ist. Insbesondere im vierten Kapitel gelange ich zu Formeln, die die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach gewissen ausgezeichneten Funktionen, die ich *Eigenfunktionen* nenne, liefern: es ist dies ein Resultat, in dem als spezielle Fälle die bekannten Entwicklungen nach trigonometrischen, Besselschen, nach Kugel-, Laméschen und Sturmschen Funktionen, sowie die Entwicklungen nach Funktionen mit mehreren Veränderlichen enthalten sind, wie sie zuerst Poincaré (a. a. O.) bei seinen Untersuchungen über gewisse Randwertaufgaben in der Potentialtheorie nachwies. *Meine Untersuchung wird zeigen, daß die Theorie der Entwicklung willkürlicher Funktionen durchaus nicht die Heranziehung von gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen erfordert, sondern daß*

1) Zur Theorie der Integralgleichungen. Gött. Nachr. 1902.

2) Sur les équations de la physique mathématique. Rendiconti del circolo di Palermo t. 8 (1894). La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta mathematica Bd. 20 (1896—97).

3) Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti. Annali di matematica s. 2 t. 25 (1897.)

4) Vgl. Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichungen. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1902, sowie Math. Ann. Bd. 58.

die Integralgleichung es ist, die die notwendige Grundlage und den natürlichen Ausgangspunkt für eine Theorie der Reihenentwicklung bildet und daß eben jene erwähnten Entwicklungen nach Orthogonalfunktionen nur Spezialfälle eines allgemeinen Integralsatzes sind — eines Satzes überdies, der als die direkte Erweiterung des bekannten algebraischen Satzes von der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form in die Summe von Quadraten anzusehen ist. *Das merkwürdigste Resultat ist, daß die Entwickelbarkeit einer Funktion nach den zu einer Integralgleichung zweiter Art zugehörigen Eigenfunktionen als abhängig erscheint von der Lösbarkeit der entsprechenden Integralgleichung erster Art.*

Zugleich erhält dabei die Frage nach der Existenz der Eigenfunktionen eine neue und vollständigere Beantwortung. In dem besonderen Fall der Randwertaufgaben der Potentialtheorie hat bekanntlich die Existenz der Eigenfunktionen zuerst H. Weber[1]) auf Grund des Dirichlet-Thomsonschen Minimalprinzipes zu beweisen gesucht, und sodann hat Poincaré (a. a. O.) den Existenzbeweis mit Benutzung der von H. A. Schwarz ausgebildeten Methoden wirklich erbracht. *Durch Anwendung meiner Theoreme folgt nicht nur die Existenz der Eigenfunktionen im allgemeinsten Falle, sondern meine Theorie liefert zugleich in einfacher Form eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz unendlich vieler Eigenfunktionen.*

Die Methode, die ich in den folgenden Kapiteln I—VI anwende, besteht darin, daß ich von einem algebraischen Problem, nämlich dem Problem der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form von n Variabeln in eine Quadratsumme, ausgehe und dann durch strenge Ausführung des Grenzüberganges für $n = \infty$ zur Lösung des zu behandelnden transzendenten Problemes gelange.[2]) Dieselben Theoreme über Integralgleichungen mit symmetrischem Kern werde ich in Kapitel XIV auf einem anderen Wege mittels der Methode der unendlichvielen Variabeln entwickeln.

Der leichteren Faßlichkeit und der kürzeren Darstellung wegen habe ich mich bei Darlegung der allgemeinen Theorie stets auf den Fall einer Integralgleichung mit einfachem Integrale beschränkt. Doch sind die Methoden und Resultate auch gültig, wenn in den oben angegebenen Integralgleichungen an Stelle der einfachen Integrale Doppel- oder mehrfache Integrale stehen und K sodann entsprechend eine symmetrische Funktion zweier Reihen von Variabeln bedeutet.

---

1) Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Math. Ann. Bd. 1. (1868.)

2) Die Grundidee dieser Methode habe ich seit W.-S. 1900—1901 wiederholt im Seminar und in Vorlesungen zum Vortrag gebracht.

Erstes Kapitel.

Lösung des algebraischen Problems.

Es mögen $K(s,t)$, $f(s)$, $\varphi(s)$ die zu Anfang dieser Mitteilung angegebene Bedeutung haben; jedoch nehmen wir das Intervall der Variabeln s, t der Einfachheit halber als das Intervall 0 bis 1 an; außerdem sei $K(s,t)$ eine symmetrische Funktion in s, t. Ferner verstehen wir unter n eine bestimmte positive ganze Zahl und benutzen für die folgenden Beweisführungen die abkürzenden Bezeichnungen:

$$K_{pq} = K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n)$$

$$Kxy = K_{11}x_1y_1 + K_{12}x_1y_2 + K_{21}x_2y_1 + \cdots + K_{nn}x_ny_n$$

$$= \sum_{p,q} K_{pq}x_py_q, \qquad (K_{pq} = K_{qp}),$$

$$\varphi_p = \varphi\left(\frac{p}{n}\right), \qquad f_p = f\left(\frac{p}{n}\right), \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$Kx_1 = K_{11}x_1 + K_{12}x_2 + \cdots + K_{1n}x_n,$$
$$Kx_2 = K_{21}x_1 + K_{22}x_2 + \cdots + K_{2n}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Kx_n = K_{n1}x_1 + K_{n2}x_2 + \cdots + K_{nn}x_n,$$
$$[x, y] = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Es ist offenbar

$$Kxy = [Kx, y] = [Ky, x].$$

Wir legen nun das algebraische Problem zugrunde: es seien aus den n linearen Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} f_1 &= \varphi_1 - l(K_{11}\varphi_1 + \cdots + K_{1n}\varphi_n), \\ f_2 &= \varphi_2 - l(K_{21}\varphi_1 + \cdots + K_{2n}\varphi_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= \varphi_n - l(K_{n1}\varphi_1 + \cdots + K_{nn}\varphi_n) \end{aligned}$$

oder kürzer

$$(2) \qquad \begin{aligned} f_1 &= \varphi_1 - lK\varphi_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= \varphi_n - lK\varphi_n \end{aligned}$$

die n Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ zu ermitteln, während die Werte f_p und die Koeffizienten K_{pq} gegeben sind und l ebenfalls als ein bekannter Parameterwert anzusehen ist. Wir ziehen zugleich die Eigenschaften der Lösungen und den Zusammenhang mit dem Problem der orthogonalen Transformation der quadratischen Form Kxx in Betracht.

Um dieses algebraische Problem zu lösen, gebrauchen wir die Determinanten

$$d(l) = \begin{vmatrix} 1 - lK_{11}, & -lK_{12}, & \ldots, & -lK_{1n} \\ -lK_{21}, & 1 - lK_{22}, & \ldots, & -lK_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -lK_{n1}, & -lK_{n2}, & \cdots, & 1 - lK_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & 1 - lK_{11}, & -lK_{12}, & \ldots, & -lK_{1n} \\ y_2, & -lK_{21}, & 1 - lK_{22}, & \ldots, & -lK_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n, & -lK_{n1}, & -lK_{n2}, & \ldots, & 1 - lK_{nn} \end{vmatrix},$$

deren erste die Diskriminante der quadratischen Form

$$[x, x] - lKxx$$

ist. Bezeichnen wir mit $D\left(l, \begin{matrix} x \\ Ky \end{matrix}\right)$ diejenige Determinante, die aus $D\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ entsteht, wenn man darin allgemein y_p durch

$$Ky_p = K_{p1}y_1 + K_{p2}y_2 + \cdots + K_{pn}y_n$$

ersetzt, so gilt, wie leicht ersichtlich ist, identisch in x, y und l die Gleichung:

$$(3) \qquad d(l)\,[x, y] + D\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) - lD\left(l, \begin{matrix} x \\ Ky \end{matrix}\right) = 0.$$

Unser Problem bestand nun darin, aus den Gleichungen (1) oder (2) die n Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ zu ermitteln, d. h. eine Linearform

$$[x, \varphi] = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \cdots + x_n\varphi_n$$

zu finden, die identisch in x die Gleichung

$$[f, x] = [\varphi, x] - l[K\varphi, x]$$

erfüllt.

Diese Gleichung wird, wie aus (3) unmittelbar einleuchtet, durch die Formel:

$$(4) \qquad [x, \varphi] = -\frac{D\left(l, \begin{matrix} x \\ f \end{matrix}\right)}{d(l)}$$

gelöst. Wenn also der Parameterwert l so beschaffen ist, daß $d(l) \neq 0$ ausfällt, so sind die Koeffizienten der Linearform (4) die gesuchten Werte der Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Dieses Resultat ist von der Voraussetzung der Symmetrie $K_{pq} = K_{qp}$ unabhängig.

Bekanntlich sind die Wurzeln der Gleichung

$$d(l) = 0$$

sämtlich reell; wir bezeichnen sie mit

$$l^{(1)}, l^{(2)}, \ldots, l^{(n)}$$

und nehmen an, daß sie voneinander verschieden sind.

Bedeuten $d_{11}(l), \ldots, d_{nn}(l)$ die Unterdeterminanten der Determinante $d(l)$ in bezug auf ihre n Diagonalelemente und ist $d'(l)$ die Ableitung von $d(l)$ nach l, so gilt identisch in l die Gleichung

$$d_{11}(l) + \cdots + d_{nn}(l) = n d(l) - l d'(l),$$

und hieraus folgt für $l = l^{(h)}$

$$d_{11}(l^{(h)}) + \cdots + d_{nn}(l^{(h)}) = - l^{(h)} d'(l^{(h)}). \tag{5}$$

Da unserer Annahme zufolge $d'(l^{(h)})$ nicht Null sein kann, so sind auch die links stehenden Unterdeterminanten gewiß nicht sämtlich Null, d. h. die homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 - l K \varphi_1 &= 0, \\ \cdots\cdots & \\ \varphi_n - l K \varphi_n &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

besitzen für $l = l^{(h)}$ ein gewisses Lösungssystem

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(h)}, \ldots, \varphi_n = \varphi_n^{(h)},$$

das bis auf einen allen diesen n Größen gemeinsamen Faktor eindeutig bestimmt ist. Da wegen (3) die Koeffizienten von $y_1, \ldots, y_n$ in dem Ausdruck

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$$

unabhängig von den Werten $x_1, \ldots x_n$. Lösungen der homogenen Gleichungen (6) sein müssen, so gilt der Ansatz

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = [\psi^{(h)}, x]\,[\varphi^{(h)}, y],$$

wo der erste Faktor rechts eine lineare Form in $x_1, \ldots, x_n$ bedeutet. Hieraus folgt wegen der Symmetrie des Ausdrucks linker Hand bei Vertauschung von x mit y

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = C[\varphi^{(h)}, x]\,[\varphi^{(h)}, y],$$

wo unter C eine von x, y unabhängige Konstante zu verstehen ist, und wenn wir den vorhin erwähnten gemeinsamen Faktor geeignet gewählt denken, so finden wir

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \pm [\varphi^{(h)}, x]\,[\varphi^{(h)}, y]. \tag{7}$$

Aus dieser Gleichung schließen wir durch Vergleich der Koeffizienten der Produkte

$$x_1 y_1, \ldots, x_n y_n$$

auf beiden Seiten die speziellere Formel

$$d_{11}(l^{(h)}) + \cdots + d_{nn}(l^{(h)}) = \mp [\varphi^{(h)}, \varphi^{(h)}], \tag{8}$$

und wegen (5) ist somit

$$[\varphi^{(h)}, \varphi^{(h)}] = \pm l^{(h)} d'(l^{(h)}), \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

und sodann nach (7)

$$(10)\qquad \frac{D\left(l^{(h)}, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})} = \frac{[\varphi^{(h)}, x]\,[\varphi^{(h)}, y]}{[\varphi^{(h)}, \varphi^{(h)}]}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Gleichung (9) zeigt an, daß in den Gleichungen (7), (8) das obere bzw. das untere Vorzeichen auf der rechten Seite zu nehmen ist, je nachdem $l^{(h)} d'(l^{(h)})$ positiv oder negativ ausfällt. Die Gleichungen (6) schreiben wir als Identität in x, wie folgt

$$(11)\qquad [\varphi^{(h)}, x] = l^{(h)} [\varphi^{(h)}, Kx]$$

und entnehmen daraus, weil $l^{(h)}$ und $l^{(k)}$ bei ungleichen Indizes verschieden sind, die Beziehung

$$[\varphi^{(h)}, \varphi^{(k)}] = 0, \qquad (h \neq k).$$

Um endlich den Zusammenhang mit der Theorie der orthogonalen Transformation der quadratischen Form zu erhalten, gehen wir von dem Ausdruck

$$\frac{D\left(l, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{d(l)}$$

aus. Da der Zähler eine Funktion $(n-1)$-ten Grades in l und der Nenner vom $n$ten Grade in l ist, so erhalten wir nach den Regeln der Partialbruchentwicklung unter Benutzung von (10)

$$\frac{D\left(l, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{d(l)} = \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{d'(l^{(1)})} \frac{1}{l - l^{(1)}} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{d'(l^{(n)})} \frac{1}{l - l^{(n)}}$$
$$= \frac{[\varphi^{(1)}, x]\,[\varphi^{(1)}, y]}{[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} \frac{l^{(1)}}{l - l^{(1)}} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x]\,[\varphi^{(n)}, y]}{[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]} \frac{l^{(n)}}{l - l^{(n)}},$$

eine Formel, die identisch in x, y, l erfüllt ist. Für $l = 0$ gehen hieraus die Formeln

$$(12)\qquad [x, y] = \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{l^{(1)} d'(l^{(1)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})}$$

$$(13)\qquad = \frac{[\varphi^{(1)}, x]\,[\varphi^{(1)}, y]}{[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x]\,[\varphi^{(n)}, y]}{[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]}$$

hervor. Setzen wir hier an Stelle von y die lineare Kombination Ky, so erhalten wir mit Rücksicht auf (11) die Identität

$$(14)\qquad Kxy = [Kx, y] = [x, Ky] = \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{(l^{(1)})^2 d'(l^{(1)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{(l^{(n)})^2 d' l^{(n)})}$$

$$(15)\qquad = \frac{[\varphi^{(1)}, x]\,[\varphi^{(1)}, y]}{l^{(1)} [\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x]\,[\varphi^{(n)}, y]}{l^{(n)} [\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]}.$$

Wir fügen noch die besonderen Formeln hinzu, die aus den beiden letzteren durch Gleichsetzen der x mit den y hervorgehen:

$$(16)\qquad [x, x] = \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(1)} d'(l^{(1)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})}$$

$$= \frac{[\varphi^{(1)}, x]^2}{[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x]^2}{[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]}$$

$$(17)\qquad Kxx = \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{(l^{(1)})^2 d'(l^{(1)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{(l^{(n)})^2 d'(l^{(n)})}$$

$$= \frac{[\varphi^{(1)}, x]^2}{l^{(1)} [\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x]^2}{l^{(n)} [\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]}.$$

Zweites Kapitel.

Lösung des transzendenten Problems.

Wir erinnern an die Bedeutung der Größen K_{pq}, wie sie am Anfange vom ersten Kapitel aus der Funktion $K(s, t)$ gebildet worden sind, und nehmen an, daß $K(s, t)$ eine *stetige* Funktion der Variabeln s, t in den betrachteten Intervallen 0 bis 1 sein möge. Unsere Methode erheischt die strenge Durchführung des Grenzüberganges für $n = \infty$. Der im ersten Kapitel zunächst erledigten algebraischen Aufgabe entspricht das transzendente Problem, die Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t) \varphi(t) dt$$

aufzulösen. Wir beschränken uns in diesem zweiten Kapitel im wesentlichen darauf, nach unserer Methode die zur Auflösung der Integralgleichung nötigen Formeln zu gewinnen, wie sie von Fredholm zuerst angegeben worden sind. Hierbei wird die Symmetrie von $K(s, t)$ noch nicht vorausgesetzt.

Entwickeln wir $d(l)$ nach Potenzen von l, wie folgt:

$$d(l) = 1 - d_1 l + d_2 l^2 - \cdots \pm d_n l^n,$$

so ist, wenn h irgendeinen der Indizes $1, 2, \ldots, n$ bedeutet,

$$d_h = \sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_h)} \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} & \cdots & K_{p_1 p_h} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} & \cdots & K_{p_2 p_h} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ K_{p_h p_1} & K_{p_h p_2} & \cdots & K_{p_h p_h} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_h \\ p_1, p_2, \cdots, p_h = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

Die Summe rechter Hand besteht aus $\binom{n}{h}$ Determinanten; nach einem bekannten Satze[1]) überschreitet der absolute Wert einer jeden Determinante

1) Hadamard, Bulletin des sciences mathématiques (2) XVII (1893).

gewiß nicht die Grenze $\sqrt{h^h K^h}$, wo K das Maximum der absoluten Beträge der Funktionswerte $K(s, t)$ bedeutet. Hieraus entnehmen wir

$$|d_h| \leqq \binom{n}{h} \sqrt{h^h}\, K^h \leqq \frac{\sqrt{h^h}}{h!} (nK)^h \leqq \left(\frac{n e K}{\sqrt{h}}\right)^h$$

d. h. es ist

$$\frac{|d^h|}{n^h} \leqq \left(\frac{eK}{\sqrt{h}}\right)^h. \tag{18}$$

Andererseits finden wir leicht, wenn h festgehalten wird, in der Grenze bei unendlich wachsendem n

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{d_h}{n^h} = \delta_h, \tag{19}$$

wo δ_h die Bedeutung eines h-fachen Integrales hat:

$$\delta_h = \frac{1}{h!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(s_1, s_1), & K(s_1, s_2), & \cdots, & K(s_1, s_h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(s_h, s_1), & K(s_h, s_2), & \cdots, & K(s_h, s_h) \end{vmatrix} ds_1 \cdots ds_h.$$

Aus (18) und (19) folgt auch

$$|\delta_h| \leqq \left(\frac{eK}{\sqrt{h}}\right)^h. \tag{20}$$

Wir führen nun die von Fredholm zuerst angegebene und wegen (20) beständig konvergente Potenzreihe

$$\delta(\lambda) = 1 - \delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 - \delta_3 \lambda^3 + \cdots$$

ein und stellen dann folgenden Hilfssatz auf:

Hilfssatz 1. Der Ausdruck $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ konvergiert bei unendlich wachsendem n gegen $\delta(\lambda)$, und zwar ist diese Konvergenz eine gleichmäßige für alle Werte von λ, deren absoluter Betrag unterhalb einer beliebig gewählten positiven Grenze Λ gelegen ist. In demselben Sinne konvergiert der Ausdruck $\frac{1}{n} d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ gegen $\delta'(\lambda)$.

Um diesen Hilfssatz zu beweisen, nehmen wir im Gegensatz zu demselben an, es existiere eine positive Größe ε derart, daß für unendlich viele ganzzahlige n und zugehörige Werte von λ mit absoluten Beträgen unterhalb Λ stets

$$\left| d\left(\frac{\lambda}{n}\right) - \delta(\lambda) \right| > \varepsilon$$

ausfällt. Nunmehr wählen wir die ganze Zahl m so groß, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: es soll für alle λ, deren absoluter Betrag unterhalb Λ liegt,

$$|\delta_{m+1} \lambda^{m+1} - \delta_{m+2} \lambda^{m+2} + \cdots| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \tag{21}$$

sein; ferner sollen die Ungleichungen

(22) $$m > (2eKA)^2$$

(23) $$\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{3}$$

erfüllt sein; dann ist gewiß im Hinblick auf (18) und (22) für jedes n auch

$$d\left(\frac{\lambda}{n}\right) = 1 - \frac{d_1}{n}\lambda + \cdots \pm \frac{d_m}{n^m}\lambda^m \mp \frac{d_{m+1}}{n^{m+1}}\lambda^{m+1} \pm \cdots \pm \frac{d_n}{n^n}\lambda^n$$
$$= 1 - \frac{d_1}{n}\lambda + \cdots \pm \frac{d_m}{n^m}\lambda^m \pm \frac{\vartheta}{2^m} \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

oder wegen (23)

(24) $$\left| d\left(\frac{\lambda}{n}\right) - \left(1 - \frac{d_1}{n}\lambda + \cdots \pm \frac{d_m}{n^m}\lambda^m\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nachdem die ganze Zahl m in dieser Art bestimmt worden ist, wählen wir die ganze Zahl n so groß, daß

(25) $$\left| \left(1 - \frac{d_1}{n}\lambda + \frac{d_2}{n^2}\lambda^2 - \cdots \pm \frac{d_m}{n^m}\lambda^m\right) - \left(1 - \delta_1\lambda + \delta_2\lambda^2 - \cdots \pm \delta_m\lambda^m\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ausfällt; wegen der Gleichung (19) ist eine solche Bestimmung von n gewiß möglich. Die Ungleichungen (21), (24), (25) zeigen nun, daß der Unterschied zwischen $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ und $\delta(\lambda)$ absolut genommen weniger als ε betragen muß; diese Folgerung widerspricht unserer Annahme, und damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Um zu erkennen, wie sich für die Determinante $D\left(l, \frac{x}{y}\right)$ der Grenzübergang zum transzendenten Problem gestaltet, verstehen wir unter $x(s)$ und $y(s)$ zwei willkürliche stetige Funktionen der reellen Variabeln s im Intervall 0 bis 1 und setzen allgemein

$$x_p = x\left(\frac{p}{n}\right), \quad y_p = y\left(\frac{p}{n}\right)$$

in jene Determinante $D\left(l, \frac{x}{y}\right)$ ein. Sodann entwickeln wir dieselbe nach Potenzen von l, wie folgt:

$$D\left(l, \frac{x}{y}\right) = D_1\left(\frac{x}{y}\right) - D_2\left(\frac{x}{y}\right)l + D_3\left(\frac{x}{y}\right)l^2 - \cdots \pm D_n\left(\frac{x}{y}\right)l^{n-1}$$

und finden leicht in der Grenze bei unendlich wachsendem n, wenn h festbleibt,

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{D_h\left(\frac{x}{y}\right)}{n^h} = \Delta_h\left(\frac{x}{y}\right),$$

wo $\Delta_h\left(\frac{x}{y}\right)$ die Bedeutung eines h-fachen Integrales hat:

$$\Delta_h\binom{x}{y} = \frac{1}{h!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} 0, & x(s_1), & x(s_2), & \ldots & x(s_h) \\ y(s_1), & K(s_1, s_1), & K(s_1, s_2), & \ldots, & K(s_1, s_h) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y(s_h), & K(s_h, s_1), & K(s_h, s_2), & \ldots, & K(s_h, s_h) \end{vmatrix} ds_1 \cdots ds_h.$$

Führen wir nun die beständig konvergente Potenzreihe ein:

$$\Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right) = \Delta_1\binom{x}{y} - \Delta_2\binom{x}{y}\lambda + \Delta_3\binom{x}{y}\lambda^2 - \cdots,$$

so folgt durch einen entsprechenden Beweis wie vorhin der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 2. Der Ausdruck $\frac{1}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{y}\right)$ konvergiert bei unendlich wachsendem n gegen $\Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right)$, und zwar ist diese Konvergenz eine gleichmäßige für alle λ, deren absoluter Betrag unterhalb einer beliebig gewählten positiven Grenze Λ gelegen ist.

Wie man sieht, ist $\Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right)$ eine Potenzreihe in λ, deren Koeffizienten noch von den willkürlichen Funktionen $x(s)$, $y(s)$ abhängen.

Wir gehen dazu über, in der Formel (3) den Grenzübergang für $n = \infty$ zu vollziehen.

Bedenken wir, daß zufolge der eingangs eingeführten Abkürzungen

$$Ky_p = K_{p1}y_1 + K_{p2}y_2 + \cdots + K_{pn}y_n$$
$$= K\left(\frac{p}{n}, \frac{1}{n}\right) y\left(\frac{1}{n}\right) + K\left(\frac{p}{n}, \frac{2}{n}\right) y\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + K\left(\frac{p}{n}, \frac{n}{n}\right) y\left(\frac{n}{n}\right)$$

ist, so erhalten wir durch das nämliche Verfahren, das zu den Hilfssätzen 1 und 2 führte, die Formel

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{\lambda}{n^2} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{Ky}\right) = \underset{n=\infty}{L} \frac{\lambda}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{\frac{1}{n}Ky}\right)$$
$$= \lambda \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{\bar{y}}\right) \right\}_{\bar{y}(s) = \int_0^1 K(s,t) y(t)\, dt}$$
$$= \lambda \int_0^1 \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{\bar{y}}\right) \right\}_{\bar{y}(s) = K(s,t)} \cdot y(t)\, dt.$$

Setzen wir daher in der Formel (3) $l = \frac{\lambda}{n}$ ein und dividieren dieselbe durch n, so liefert der Grenzübergang für unendlich wachsende n:

$$(26)\quad \delta(\lambda)\int_0^1 x(s)\, y(s)\, ds + \Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right) - \lambda \int_0^1 \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{\bar{y}}\right) \right\}_{\bar{y}(s) = K(s,t)} y(t)\, dt = 0.$$

Diese Formel ist eine Identität in λ und gilt, wenn $x(s)$, $y(s)$ irgendwelche stetige Funktionen ihres Argumentes sind.

Setzen wir in dieser Formel (26)

$$x(r) = K(s, r) \quad \text{und} \quad y(r) = K(r, t)$$

ein und benutzen die Abkürzung

(27) $$\varDelta(\lambda;\, s, t) = \lambda \left\{ \varDelta\left(\lambda, {x \atop y}\right) \right\}_{\substack{x(r) = K(s, r) \\ y(r) = K(r, t)}} - \delta(\lambda)\, K(s, t),$$

so geht (26) über in

(28) $$\delta(\lambda)\, K(s, t) + \varDelta(\lambda;\, s, t) - \lambda \int_0^1 \varDelta(\lambda;\, s, r)\, K(r, t)\, dr = 0.$$

Setzt man endlich

$$\mathsf{K}(s, t) = -\frac{\varDelta(\lambda;\, s, t)}{\delta(\lambda)},$$

so erhält man

(29) $$K(s, t) = \mathsf{K}(s, t) - \lambda \int_0^1 \mathsf{K}(s, r)\, K(r, t)\, dr.$$

Ebenso erhält man, von der zu (3) analogen Identität

$$d(l)\, [x, y] + \left[D\left(l, {x \atop y}\right)\right] - l \left[D\left(l, {\bar{x} \atop y}\right)\right]_{\bar{x}_q = \sum\limits_p K_{pq}\, x_p} = 0,$$

der D gleichfalls genügt, ausgehend, die Gleichung

(29′) $$K(s, t) = \mathsf{K}(s, t) - \lambda \int_0^1 K(s, r)\, \mathsf{K}(r, t)\, dr.$$

Im vorstehenden sind $\varDelta(\lambda; s, t)$ und $\mathsf{K}(s, t)$ Funktionen der reellen Veränderlichen s, t, die noch den Parameter λ enthalten; die Formeln (28), (29) und (29′) gelten identisch in s, t und λ.

Die Funktion $\mathsf{K}(s, t)$ heiße die *lösende Funktion für den Kern* $K(s, t)$; mittels derselben läßt sich nämlich die zugrunde gelegte Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

auflösen, wie folgt:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 \mathsf{K}(s, t)\, f(t)\, dt.$$

Man erkennt dies sofort durch Einführung der rechten Seite der letzten Formel in die voranstehende Integralgleichung; zugleich erkennen wir, da auch umgekehrt die zweite Integralgleichung durch die erste aufgelöst wird, die Eindeutigkeit der Auflösung der Integralgleichung zweiter Art für solche λ, die nicht Nullstellen von $\delta(\lambda)$ sind.

Für $\varDelta(\lambda; s, t)$ erhalten wir aus den obigen Angaben die Reihenentwicklung

$$\varDelta(\lambda;\, s, t) = -K(s, t) + \varDelta_1(s, t)\, \lambda - \varDelta_2(s, t)\, \lambda^2 + - \cdots,$$

wo

$$\Delta_h(s,t) = \frac{1}{h!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(s,t), & K(s,s_1), & \ldots, & K(s,s_h) \\ K(s_1,t), & K(s_1,s_1), & \ldots, & K(s_1,s_h) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(s_h,t), & K(s_h,s_1), & \ldots, & K(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_1 \ldots ds_h$$

bedeutet. Aus dieser Formel folgt leicht die Identität in λ:

$$\delta'(\lambda) = \int_0^1 \Delta(\lambda; s, s)\, ds. \tag{30}$$

Die so erhaltenen Formeln sind nichts anderes als die bereits mehrmals erwähnten Formeln von Fredholm.

Drittes Kapitel.

Das transzendente Problem, welches der orthogonalen Transformation der quadratischen Form in eine Quadratsumme entspricht.

Unsere wichtigste Aufgabe besteht darin, diejenigen algebraischen Untersuchungen im ersten Kapitel, welche die orthogonale Transformation der quadratischen Form Kxx betreffen, durch Ausführung des Grenzüberganges für $n = \infty$ auf das transzendente Gebiet zu übertragen. Von hier ab machen wir die wesentliche Voraussetzung, daß $K(s,t)$ eine symmetrische Funktion in s und t ist.

Zu dem Zwecke beweisen wir zunächst folgende Sätze über die Nullstellen von $\delta(\lambda)$.

Satz 1. *Die Funktion $\delta(\lambda)$ besitzt keine komplexen Nullstellen.*

Zum Beweise nehmen wir im Gegenteil das Vorhandensein einer solchen Nullstelle an, schlagen dann um dieselbe als Mittelpunkt in der komplexen λ-Ebene einen Kreis, auf dessen Peripherie und in dessen Inneres keine weitere Nullstelle von $\delta(\lambda)$ fällt und auf dessen Peripherie überdies $\delta'(\lambda)$ von Null verschieden ist. Da $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ nach Hilfssatz 1 für unendlich wachsendes n gleichmäßig gegen $\delta(\lambda)$ und $\frac{1}{n}d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ gegen $\delta'(\lambda)$ konvergiert, so müßte für genügend große Werte von n auf der ganzen Peripherie jenes Kreises der Quotient $\dfrac{\frac{1}{n}d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)}$ sich von den Werten des Quotienten $\dfrac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)}$ um beliebig wenig unterscheiden, und ebenso würde dann auch der Unterschied der über die Kreisperipherie erstreckten Integrale

$$\int \frac{\frac{1}{n} d' \frac{\lambda}{n}}{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)} d\lambda \quad \text{und} \quad \int \frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} d\lambda$$

beliebig nahe an Null liegen; dies aber wäre unmöglich; denn das erste Integral hat den Wert Null, da die Nullstellen von $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ sämtlich reell sind, das letzte Integral dagegen wird derjenigen ganzen Zahl gleich, die die Vielfachheit der Nullstelle von $\delta(\lambda)$ im Kreismittelpunkt angibt.

In ähnlicher Weise erkennen wir auf Grund der in Hilfssatz 1 angegebenen gleichmäßigen Konvergenz auch folgende Tatsache:

Satz 2. *Wir denken uns für jede der Gleichungen* $d(l) = 0$ *ihre* n *Wurzeln dem absoluten Betrage nach geordnet*

$$l^{(1)}, \ldots, l^{(n)}$$

derart, daß, wenn entgegengesetzt gleiche Wurzeln vorhanden sind, die positive vorangeht und überdies beim Vorhandensein mehrfacher Wurzeln jede so oft gesetzt werden soll, als ihre Vielfachheit beträgt. Ebenso ordne man die Nullstellen von $\delta(\lambda)$, *soweit solche da sind: alsdann ist*

$$\underset{n=\infty}{L} n l^{(1)} = \lambda^{(1)}, \quad \underset{n=\infty}{L} n l^{(2)} = \lambda^{(2)}, \quad \underset{n=\infty}{L} n l^{(3)} = \lambda^{(3)}, \ldots.$$

Man darf jedoch aus Satz 2 keineswegs auf die Existenz von Nullstellen von $\delta(\lambda)$ schließen, da sehr wohl der Fall eintreten könnte, daß bereits $nl^{(1)}$ für unendlich wachsendes n absolut über alle Grenzen zunimmt.

Wir führen hier noch folgende Bezeichnungen ein: die Nullstellen von $\delta(\lambda)$ mögen die *zum Kern* $K(s,t)$ *gehörigen Eigenwerte* heißen.

Unter $K(s,t)$ wurde bisher irgendeine symmetrische Funktion der reellen Veränderlichen s, t verstanden; wir machen nun in diesem dritten Kapitel durchweg die Annahme, daß die zu $K(s,t)$ gehörige Funktion $\delta(\lambda)$ keine mehrfache Nullstelle besitzen möge, so daß für eine jede Wurzel der Gleichung $\delta(\lambda) = 0$ gewiß $\delta'(\lambda)$ von Null verschieden ausfällt.

Wir haben ferner zu beachten, daß die gegen Schluß des ersten Kapitels entwickelte Transformationstheorie der quadratischen aus $K(s,t)$ gebildeten Form

$$Kxx = \sum_{p,q} K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) x_p x_q \qquad (p, q = 1, 2 \ldots, n)$$

zur Voraussetzung hatte, daß die Determinante $d(l)$ keine mehrfache Nullstelle besitzt. Sollte nun für irgendwelche Werte von n die zu $K(s,t)$ gehörige Determinante $d(l)$ eine mehrfache Nullstelle aufweisen, so verfahre man in folgender Weise: man denke sich für jeden solchen Wert von n an Stelle von $K(s,t)$ eine modifizierte Funktion $\overline{K}(s,t)$ gesetzt,

so daß die Nullstellen der entsprechend gebildeten Determinante $\bar{d}(l)$ für $\bar{K}(s,t)$ sämtlich einfach ausfallen; doch sollen die Werte der modifizierten Funktion $\bar{K}(s,t)$ sich von denen des ursprünglichen Kerns $K(s,t)$ nur so wenig unterscheiden, daß für alle Werte der Variabeln s, t, für alle Indizes $(h = 1, 2, \ldots, n)$ und für alle Paare von stetigen Funktionen $x(s)$, $y(s)$ die Ungleichungen

$$|K(s,t) - \bar{K}(s,t)| < \frac{1}{n},$$

$$\left.\begin{aligned} |d_h - \bar{d}_h| &< 1, \\ |l^{(h)} - \bar{l}^{(h)}| &< \frac{1}{n^2}, \\ \left|D_h\binom{x}{y} - \bar{D}_h\binom{x}{y}\right| &< M(x)\cdot M(y) \end{aligned}\right\} (h = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind; dabei bedeuten $\bar{d}_h$, $\bar{D}_h\binom{x}{y}$ die Koeffizienten der entsprechend für $\bar{K}(s,t)$ gebildeten Determinanten $\bar{d}(l)$, $\bar{D}\left(l, \frac{x}{y}\right)$, ferner $\bar{l}^{(h)}$ die entsprechenden Nullstellen von $\bar{d}(l)$ und $M(x)$, $M(y)$ sollen die Maxima der absoluten Werte der Funktionen $x(s)$ bzw. $y(s)$ sein. Offenbar nähern sich dann die Ausdrücke

$$\bar{K}(s,t), \qquad \bar{d}\left(\frac{\lambda}{n}\right), \qquad \frac{1}{n}\bar{D}\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{y}\right)$$

für unendlich wachsendes n gleichmäßig den Grenzen bzw.

$$K(s,t), \qquad \delta(\lambda), \qquad \Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right),$$

d. h. den nämlichen Grenzen, wie die mittels des nicht modifizierten Kernes gebildeten Ausdrücke. Wir sind dadurch in den Stand gesetzt, auch diejenigen Formeln der im ersten Kapitel entwickelten Theorie der quadratischen Form Kxx anzuwenden, zu deren Gültigkeit das Nichtvorhandensein mehrfacher Nullstellen von $d(l)$ eine notwendige Voraussetzung war. Obwohl wir in den fraglichen Fällen mit den modifizierten Ausdrücken operieren müssen, wollen wir doch fortan bei unserer Darstellung der größeren Übersicht halber die ursprünglichen Ausdrücke ohne die Querstriche beibehalten.

Es bezeichne $\lambda^{(h)}$ die h^{te} Nullstelle von $\delta(\lambda)$ unter Beachtung der S. 14 festgesetzten Reihenfolge; aus (26) folgt

$$(31) \qquad \Delta\left(\lambda^{(h)}, \frac{x}{y}\right) = \lambda^{(h)} \int_0^1 \left\{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \frac{x}{\bar{y}}\right)\right\}_{\bar{y}(r) = K(r,t)} y(t)\,dt,$$

und wegen der Symmetrie des Ausdruckes $\Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right)$ in bezug auf $x(s)$, $y(s)$ ist daher auch:

$$\Delta\left(\lambda^{(h)}, \frac{x}{y}\right) = \lambda^{(h)} \int_0^1 \left\{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \frac{\bar{x}}{y}\right)\right\}_{\bar{x}(r) = K(r,s)} x(s)\,ds$$

und, wenn wir hierin $y(r) = K(r, t)$ einsetzen:

$$\left\{\varDelta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)\right\}_{y(r)=K(r,t)} = \lambda^{(h)} \int_0^1 \left\{\varDelta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} \bar{x} \\ y \end{matrix}\right)\right\}_{\substack{\bar{x}(r)=K(r,s) \\ y(r)=K(r,t)}} x(s)\, ds$$

oder im Hinblick auf (27)

(32) $$\left\{\varDelta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)\right\}_{y(r)=K(r,t)} = \int_0^1 \varDelta(\lambda^{(h)}; s, t)\, x(s)\, ds.$$

Aus (31) und (32) erhalten wir

(33) $$\varDelta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \lambda^{(h)} \int_0^1 \int_0^1 \varDelta(\lambda^{(h)}; s, t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt.$$

Zugleich ergiebt sich, wenn wir in (32) $x(r) = K(r, s)$ einführen, im Hinblick auf (27)

(34) $$\varDelta(\lambda^{(h)}; s, t) = \lambda^{(h)} \int_0^1 \varDelta(\lambda^{(h)}; r, t)\, K(r, s)\, dr.$$

Nunmehr bezeichne $l^{(h)}$ die h^{te} Nullstelle von $d(l)$ unter Beachtung der oben festgesetzten Reihenfolge. Wegen Formel (7) ist allgemein

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right) = D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ x^* \end{matrix}\right) D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} y \\ y^* \end{matrix}\right),$$

und hieraus folgt in der Grenze für unendlich wachsendes n

$$\varDelta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \varDelta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right) = \varDelta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ x^* \end{matrix}\right) \varDelta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} y \\ y^* \end{matrix}\right),$$

wenn hierin x^*, y^* ebenso wie x, y stetige Funktionen ihres Argumentes vorstellen, und folglich im Hinblick auf (27)

(35) $$\varDelta(\lambda^{(h)}; s, t)\, \varDelta(\lambda^{(h)}; s^*, t^*) = \varDelta(\lambda^{(h)}; s, s^*)\, \varDelta(\lambda^{(h)}; t, t^*).$$

Wegen (30) ist

(36) $$\int_0^1 \varDelta(\lambda^{(h)}; s, s)\, ds = \delta'(\lambda^{(h)}),$$

und da unserer Annahme zufolge die Nullstellen von $\delta(\lambda)$ sämtlich einfach sind, so fällt $\delta'(\lambda^{(h)})$ von Null verschieden aus, und folglich ist auch gewiß $\varDelta(\lambda^{(h)}; s, s)$ nicht identisch für alle Werte von s Null; es sei s^* ein solcher spezieller Wert, daß $\varDelta(\lambda^{(h)}; s^*, s^*)$ von Null verschieden ausfällt. Alsdann setzen wir

(37) $$\varphi^{(h)}(s) = \left|\sqrt{\frac{\lambda^{(h)}}{\varDelta(\lambda^{(h)}; s^*, s^*)}}\right| \varDelta(\lambda^{(h)}; s, s^*);$$

dadurch ist $\varphi^{(h)}(s)$ als eine stetige Funktion der Variabeln s definiert: sie heiße die *zu dem Eigenwerte $\lambda^{(h)}$ gehörige Eigenfunktion.* Wir gewinnen aus (35), (37), wenn wir noch t^* durch s^* ersetzen, die Gleichung

(38) $$\lambda^{(h)} \varDelta(\lambda^{(h)}; s, t) = \pm\, \varphi^{(h)}(s)\, \varphi^{(h)}(t).$$

Mit Hilfe von (36) folgt mithin

$$\int_0^1 (\varphi^{(h)}(s))^2\, ds = \pm\, \lambda^{(h)} \delta'(\lambda^{(h)}),$$

und daraus erkennen wir, daß in den beiden letzten Gleichungen das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $\lambda^{(h)}\delta'(\lambda^{(h)})$ positiv oder negativ ausfällt.

Unter Hinzuziehung von (33) leiten wir noch die Formeln ab:

$$\varDelta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \pm \int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, y(s)\, ds$$

und

$$\frac{\varDelta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{\lambda^{(h)}\delta'(\lambda^{(h)})} = \frac{\int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, y(s)\, ds}{\int_0^1 (\varphi^{(h)}(s))^2\, ds}.$$

Endlich ergibt die Formel (34) in Verbindung mit (38) nach Weglassung des Faktors $\varphi^{(h)}(t)$

$$\varphi^{(h)}(s) = \lambda^{(h)} \int_0^1 K(s,t)\, \varphi^{(h)}(t)\, dt,$$

und hieraus leiten wir, wenn $\varphi^{(k)}(s)$ die zu einem anderen Eigenwerte $\lambda^{(k)}$ gehörige Eigenfunktion bezeichnet, sofort die Gleichung ab:

$$\int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, \varphi^{(k)}(s)\, ds = 0, \quad (h \neq k).$$

Oftmals ist es im Interesse einer kürzeren Schreibweise vorzuziehen, an Stelle der Eigenfunktionen $\varphi^{(h)}(s)$ die Funktionen

$$\psi^{(h)}(s) = \frac{\varphi^{(h)}(s)}{\left|\sqrt{\int_0^1 (\varphi^{(h)}(s))^2\, ds}\right|}$$

einzuführen; dieselben mögen *normierte Eigenfunktionen* oder, wenn ein Mißverständnis ausgeschlossen erscheint, *Eigenfunktionen* schlechtweg heißen: sie genügen den Gleichungen

$$(39) \qquad \frac{\varDelta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{\lambda^{(h)}\delta'(\lambda^{(h)})} = \int_0^1 \psi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_0^1 \psi^{(h)}(s)\, y(s)\, ds,$$

$$\int_0^1 (\psi^{(h)}(s))^2\, ds = 1,$$

$$\int_0^1 \psi^{(h)}(s)\, \psi^{(k)}(s)\, ds = 0, \qquad (h \neq k)$$

$$(40) \qquad \psi^{(h)}(s) = \lambda^{(h)} \int_0^1 K(s,t)\, \psi^{(h)}(t)\, dt.$$

Nunmehr haben wir die Vorbereitungen beendet, um diejenige Fragestellung zu erledigen, welche aus dem algebraischen Problem der orthogonalen Transformation der quadratischen Form beim Grenzübergange für unendlich wachsendes n entsteht.

Wir haben am Schluß des ersten Kapitels die Formeln erhalten:

$$[x, x] = \frac{D\left(l^{(1)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(1)} d'(l^{(1)})} + \frac{D\left(l^{(2)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(2)} d'(l^{(2)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})},$$

$$\frac{D\left(l^{(h)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})} = \frac{[\varphi^{(h)}, x]^2}{[\varphi^{(h)}, \varphi^{(h)}]}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Die letzte Formel zeigt, daß jedes Glied der Summe rechter Hand im Ausdruck für $[x, x]$ positiv ausfällt; mithin gilt, wenn m irgendeine ganze Zahl unterhalb n bedeutet, die Ungleichung:

$$(41) \qquad \frac{D\left(l^{(m+1)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(m+1)} d'(l^{(m+1)})} + \frac{D\left(l^{(m+2)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(m+2)} d'(l^{(m+2)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})} \leqq [x, x].$$

Da wegen

$$|\,[\varphi^{(h)}, x]\,[\varphi^{(h)}, y]\,| \leqq \tfrac{1}{2}\left([\varphi^{(h)}, x]^2 + [\varphi^{(h)}, y]^2\right)$$

notwendig

$$\left|\frac{D\left(l^{(h)}, \frac{x}{y}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})}\right| \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{D\left(l^{(h)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})} + \frac{D\left(l^{(h)}, \frac{y}{y}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})}\right)$$

ist, so folgt, indem wir (41) anwenden

$$\left|\frac{D\left(l^{(m+1)}, \frac{x}{y}\right)}{l^{(m+1)} d'(l^{(m+1)})}\right| + \left|\frac{D\left(l^{(m+2)}, \frac{x}{y}\right)}{l^{(m+2)} d'(l^{(m+2)})}\right| + \cdots + \left|\frac{D\left(l^{(n)}, \frac{x}{y}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})}\right| \leqq \tfrac{1}{2}([x, x] + [y, y]),$$

und mithin ist um so mehr die Summe der $n - m$ letzten Glieder auf der rechten Seite der Formel (14) absolut nicht größer als

$$\frac{1}{2\,|\,l^{(m+1)}|}\,([x, x] + [y, y]);$$

demnach ist mit Rücksicht auf jene Formel (14) auch

$$(42) \qquad \left| Kxy - \frac{D\left(l^{(1)}, \frac{x}{y}\right)}{(l^{(1)})^2 d'(l^{(1)})} - \frac{D\left(l^{(2)}, \frac{x}{y}\right)}{(l^{(2)})^2 d'(l^{(2)})} - \cdots - \frac{D\left(l^{(m)}, \frac{x}{y}\right)}{(l^{(m)})^2 d'(l^{(m)})} \right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\,|\,l^{(m+1)}|}\,([x, x] + [y, y]).$$

In dieser Formel wollen wir, wie bereits früher geschehen ist,

$$K_{pq} = K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \qquad x_p = x\left(\frac{p}{n}\right), \qquad y_p = y\left(\frac{p}{n}\right)$$

eingesetzt denken und sodann nach Division durch n^2, während m festbleibt, den Grenzübergang für $n = \infty$ ausführen. Berücksichtigen wir die Grenzgleichungen:

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{1}{n^2} Kxy = \underset{n=\infty}{L} \frac{1}{n^2} \sum K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) x_p y_q = \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt,$$

$$\underset{n=\infty}{L}\, n l^{(h)} = \lambda^{(h)},$$

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{[x,x]}{n} = \int_0^1 (x(s))^2 ds, \qquad \underset{n=\infty}{L} \frac{[y,y]}{n} = \int_0^1 (y(s))^2 ds$$

und beachten wir, daß den Hilfssätzen 1 und 2 gemäß die Ausdrücke $\frac{1}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ und $\frac{1}{n} d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ gleichmäßig für alle unterhalb einer festen Grenze liegenden λ gegen $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ bzw. $\delta'(\lambda)$ konvergieren, so geht die Ungleichung (42) in die folgende über:

$$(43) \quad \left| \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt - \frac{\Delta\left(\lambda^{(1)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{(\lambda^{(1)})^2 \delta'(\lambda^{(1)})} - \frac{\Delta\left(\lambda^{(2)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{(\lambda^{(2)})^2 \delta'(\lambda^{(2)})} - \cdots - \frac{\Delta\left(\lambda^{(m)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{(\lambda^{(m)})^2 \delta'(\lambda^{(m)})} \right| \leqq \frac{1}{2\,|\lambda^{(m+1)}|} \left(\int_0^1 (x(s))^2 ds + \int_0^1 (y(s))^2 ds \right).$$

Nunmehr benutzen wir die Tatsache, daß die Eigenwerte $\lambda^{(m)}$, falls es ihrer unendlich viele gibt, mit unendlich wachsendem m absolut genommen selbst über jede Grenze wachsen, und erkennen dann mit Hilfe der Formel (39), indem wir noch statt der Integrationsgrenzen 0,1 die allgemeineren Grenzen a, b einführen, folgendes grundlegende Theorem:

Theorem. Es sei der Kern $K(s, t)$ einer Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$$

eine symmetrische stetige Funktion von s, t; ferner seien $\lambda^{(h)}$ die zu $K(s,t)$ gehörigen Eigenwerte und $\psi^{(h)}(s)$ die zugehörigen normierten Eigenfunktionen; endlich seien $x(s)$, $y(s)$ irgendwelche stetige Funktionen von s: alsdann gilt die Entwicklung

$$(44) \quad \int_a^b \int_a^b K(s,t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \int_a^b \psi^{(1)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_a^b \psi^{(1)}(s)\, y(s)\, ds + \frac{1}{\lambda^{(2)}} \int_a^b \psi^{(2)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_a^b \psi^{(2)}(s)\, y(s)\, ds + \cdots,$$

wobei die Reihe rechter Hand absolut und gleichmäßig für alle Funktionen $x(s)$, $y(s)$ konvergiert, für welche die Integrale

$$\int_a^b (x(s))^2 ds, \qquad \int_a^b (y(s))^2 ds$$

unterhalb einer festen endlichen Grenze bleiben.

Dies ist dasjenige Theorem, das für $x(s) = y(s)$ dem im ersten Kapitel genannten algebraischen Satze über die Transformation einer quadratischen Form in die Quadratsumme von linearen Formen entspricht.

Einige unmittelbare Folgerungen dieses Theorems sind folgende:

Die nämlichen Eigenwerte $\lambda^{(h)}$ und Eigenfunktionen $\psi^{(h)}(s)$ können nicht noch zu einem anderen von $K(s,t)$ verschiedenen Kern gehören; die $\lambda^{(h)}$ und $\psi^{(h)}(s)$ bestimmen vielmehr in ihrer Gesamtheit den Kern $K(s,t)$ vollständig.

Setzt man in die Formel des Theorems an Stelle von $y(t)$ das Integral $\int_a^b K(r,t)\, y(r)\, dr$ ein, so entsteht mit Rücksicht auf (40) die folgende Formel:

$$\int_a^b\int_a^b KK(s,t)\, x(s) y(t)\, ds\, dt = \frac{1}{(\lambda^{(1)})^2} \int_a^b \psi^{(1)}(s) x(s) ds \cdot \int_a^b \psi^{(1)}(s) y(s) ds$$
$$+ \frac{1}{(\lambda^{(2)})^2} \int_a^b \psi^{(2)}(s) x(s) ds \cdot \int_a^b \psi^{(2)}(s) y(s) ds + \cdots,$$

wobei zur Abkürzung

$$KK(s,t) = \int_a^b K(s,r)\, K(t,r)\, dr$$

gesetzt ist; diese Funktion $KK(s,t)$ möge der *aus* $K(s,t)$ *zweifach zusammengesetzte Kern* heißen. Aus Formel (44) erkennen wir, daß der aus $K(s,t)$ zweifach zusammengesetzte Kern dieselben Eigenfunktionen besitzt, wie $K(s,t)$, während die Eigenwerte die Quadrate der zu $K(s,t)$ gehörigen Eigenwerte sind.

Es möge hier noch eine Verallgemeinerung der Formel (29) Platz finden. Bringen wir nämlich die Abhängigkeit der lösenden Funktion $\mathsf{K}(s,t)$ vom Parameter λ zum Ausdruck, indem wir für dieselbe die Bezeichnung $\mathsf{K}(\lambda; s,t)$ anwenden, und setzen wir zur vorübergehenden Abkürzung

$$F(s,t) = \mathsf{K}(\lambda; s,t) - \mathsf{K}(\mu; s,t) + (\mu - \lambda)\int_a^b \mathsf{K}(\lambda; s,r)\, \mathsf{K}(\mu; r,t)\, dr,$$

so erhalten wir mittelst wiederholter Anwendung von (29′) die Identität

$$F(s,t) - \lambda \int_a^b K(r,s)\, F(r,t)\, dr = 0$$

und diese zeigt zu Folge einer Bemerkung am Schluß von II, daß $F(s,t)$ jedenfalls für jeden solchen Wert von λ verschwindet, der von den Eigen-

werten $\lambda^{(h)}$ verschieden ausfällt. Daher ist $F(s, t)$ notwendig für alle Argumente λ, μ, s, t identisch Null, d. h. es gilt die allgemeine Formel

$$(45)\qquad \mathsf{K}(\lambda; s, t) - \mathsf{K}(\mu; s, t) = (\lambda - \mu)\int_a^b \mathsf{K}(\lambda; s, r)\, \mathsf{K}(\mu; r, t)\, dr.$$

Diese Formel können wir auch in der Gestalt schreiben:

$$(46)\qquad \mathsf{K}(\mu; s, t) = \mathsf{K}(\lambda + \mu; s, t) - \lambda\int_a^b \mathsf{K}(\lambda + \mu; s, r)\, \mathsf{K}(\mu; r, t)\, dr;$$

hieraus folgt, daß, wenn wir $\mathsf{K}(\mu; s, t)$ als Kern für eine Integralgleichung zweiter Art nehmen, die zugehörige lösende Funktion notwendig $\mathsf{K}(\lambda + \mu; s, t)$ ist. Zugleich finden wir

$$\int_a^b \psi^{(h)}(t)\, \mathsf{K}(\lambda; s, t)\, dt = \frac{\psi^{(h)}(s)}{\lambda^{(h)} - \lambda}$$

und erkennen hieraus, daß zum Kern $\mathsf{K}(\mu; s, t)$ dieselben Eigenfunktionen wie zum Kern $K(s, t)$ gehören, während die zugehörigen Eigenwerte die Größen $\lambda^{(h)} - \mu$ sind.

Viertes Kapitel.

Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Eigenfunktionen.

Die erste wichtige Anwendung des im dritten Kapitel bewiesenen Theorems geschehe zur Beantwortung der Frage nach der Existenz der Eigenwerte $\lambda^{(h)}$. Diese Frage ist von besonderem Interesse, weil die entsprechende speziellere Aufgabe in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen, nämlich der Nachweis der Existenz gewisser ausgezeichneter Werte für die in der Differentialgleichung oder in der Randbedingung auftretenden Parameter bisher wesentliche Schwierigkeiten verursacht hat. Durch Heranziehung unseres Theorems wird die weit allgemeinere Frage nach der Existenz der Eigenwerte, die zu einer Integralgleichung zweiter Art gehören, auf einfache und vollständige Weise beantwortet. Nehmen wir nämlich an, es gäbe keine oder nur eine endliche Anzahl, etwa m Eigenwerte, so ist die in dem Theorem auftretende Reihe (44) eine endliche mit m Gliedern und, da die Formel (44) des Theorems für alle stetigen Funktionen $x(s)$ und $y(s)$ gelten soll, so folgt aus derselben mit Notwendigkeit

$$K(s, t) = \frac{1}{\lambda^{(1)}}\, \psi^{(1)}(s)\, \psi^{(1)}(t) + \cdots + \frac{1}{\lambda^{(m)}}\, \psi^{(m)}(s)\, \psi^{(m)}(t),$$

d. h. $K(s,t)$ vermag, wenn man eine der beiden Variablen, etwa t, als Parameter auffaßt und diesem irgendwelche konstante Werte erteilt, nur m linear unabhängige Funktionen der anderen Variabeln s darzustellen. Umgekehrt, wenn $K(s,t)$ diese Besonderheit aufweist, so verschwinden, wie man sieht, alle Koeffizienten der Potenzreihe $\delta(\lambda)$, die mit einer höheren als der m-ten Potenz von λ multipliziert sind, d. h. $\delta(\lambda)$ wird eine ganze rationale Funktion in λ, und es gibt dann gewiß nur m Eigenwerte. Wir sprechen somit den Satz aus:

Satz 3. *Die zu $K(s,t)$ gehörigen Eigenwerte sind stets in unendlicher Anzahl vorhanden — es sei denn, daß $K(s,t)$ als eine endliche Summe von Produkten darstellbar ist, deren einer Faktor nur von s, deren anderer nur von t abhängt; tritt dieser Fall ein, so ist die Zahl der Eigenwerte gleich der Anzahl der Summanden in jener Summe, und $\delta(\lambda)$ ist eine ganze rationale Funktion von einem Grade gleich dieser Anzahl.*[1])

Wir wenden uns nunmehr zu der Frage der Entwicklung jener willkürlichen Funktion in eine unendliche Reihe, die nach Eigenfunktionen fortschreitet. Führen wir in die Formel (44) unseres Theorems

$$y(t) = K(r,t)$$

ein und setzen

$$f(r) = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,K(r,t)\,x(s)\,ds\,dt,$$

bedenken wir sodann, daß mit Rücksicht auf (40)

$$\int_a^b f(r)\,\psi^{(m)}(r)\,dr = \frac{1}{(\lambda^{(m)})^2}\int_a^b x(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds$$

wird, so geht die Formel (44) unseres Theorems über in

$$f(r) = \int_a^b f(s)\,\psi^{(1)}(s)\,ds\cdot\psi^{(1)}(r) + \int_a^b f(s)\,\psi^{(2)}(s)\,ds\cdot\psi^{(2)}(r) + \cdots,$$

d. h. es gilt der Satz:

Satz 4. *Wenn eine Funktion $f(s)$ sich in der Gestalt*

$$f(s) = \int_a^b\int_a^b K(r,t)\,K(s,t)\,h(r)\,dr\,dt$$

darstellen läßt, wo $h(r)$ eine stetige Funktion von r ist, so läßt sie sich auf

1) Der von mir hier zuerst aufgestellte und bewiesene Satz von der Existenz eines Eigenwertes für jeden nicht identisch verschwindenden Kern bildet einen integrierenden Bestandteil meiner Theorie und ist, als ich meine Untersuchungen über Integralgleichungen begann, eines meiner frühesten Ergebnisse gewesen; in neueren Arbeiten findet sich — offenbar versehentlich — eine gegenteilige Behauptung ausgesprochen.

die Fouriersche Weise in eine nach Eigenfunktionen des Kernes $K(s, t)$ fortschreitende Reihe entwickeln, wie folgt

$$f(s) = c_1 \psi^{(1)}(s) + c_2 \psi^{(2)}(s) + \cdots;$$

$$c_m = \int_a^b f(s) \psi^{(m)}(s)\, ds.$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.[1])

Die in diesem Satze gemachte Voraussetzung über $f(s)$ ist gleichbedeutend mit der Forderung, es soll eine stetige Funktion $h(s)$ geben, so daß die Integraldarstellung

$$f(s) = \int_a^b KK(s, t)\, h(t)\, dt$$

gilt, oder auch mit der Forderung, es soll zwei stetige Funktionen $g(s)$ und $h(s)$ geben, so daß

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, g(t)\, dt,$$

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt$$

wird.

Wenn $K(s, t)$ eine solche symmetrische Funktion von s, t ist, daß die Gleichung

$$\int_a^b K(s, t)\, g(s)\, ds = 0$$

sich niemals durch eine stetige von Null verschiedene Funktion $g(s)$ identisch in t erfüllen läßt, so heiße $K(s, t)$ *ein abgeschlossener Kern.* Es ist leicht, aus Satz 3 zu erkennen, daß zu einem abgeschlossenen Kern stets unendlich viele Eigenwerte gehören. Ferner können wir für einen abgeschlossenen Kern folgende Behauptungen aufstellen:

Satz 5. *Es sei $K(s, t)$ ein abgeschlossener Kern und $\psi^{(m)}(s)$ die zugehörigen Eigenfunktionen: wenn dann $h(s)$ eine stetige Funktion ist, so daß für alle m die Gleichung*

$$\int_a^b h(s) \psi^{(m)}(s)\, ds = 0$$

erfüllt ist, so ist $h(s)$ identisch Null.

---

1) Das soll heißen: die Reihe der absolut genommenen Glieder konvergiert gleichmäßig.

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir

$$g(s)=\int_a^b K(s,t)h(t)\,dt,$$

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)g(t)\,dt.$$

Nach Satz 4 gestattet $f(s)$ die Entwicklung nach den Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(s)$, und zwar erhält man für die Koeffizienten dieser Entwicklung

$$c_m=\int_a^b f(s)\psi^{(m)}(s)\,ds=\frac{1}{\lambda^{(m)}}\int_a^b g(s)\psi^{(m)}(s)\,ds=\frac{1}{(\lambda^{(m)})^2}\int_a^b h(s)\psi^{(m)}(s)\,ds=0,$$

folglich ist $f(s)$ identisch Null. Da $K(s,t)$ ein abgeschlossener Kern sein sollte, so folgt hieraus zunächst $g(s)=0$ und sodann auch $h(s)=0$.

Satz 6. *Es sei $K(s,t)$ ein abgeschlossener Kern und $f(s)$ irgendeine stetige Funktion: wenn sich alsdann herausstellt, daß die in Fourierscher Weise gebildete Reihe*

$$c_1\psi^{(1)}(s)+c_2\psi^{(2)}(s)+\cdots,$$

$$c_m=\int_a^b f(s)\psi^{(m)}(s)\,ds$$

gleichmäßig konvergiert, so stellt sie die Funktion $f(s)$ dar.

In der Tat erweist sich die Differenz von $f(s)$ und der durch jene Reihe dargestellten Funktion von s unter Benutzung des Satzes 5 als Null.

Für die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion $f(s)$ nach Eigenfunktionen haben wir in den Sätzen 4 und 6 gewisse Kriterien aufgestellt. Wir können die Bedingungen des Satzes 4 wesentlich vereinfachen; es gilt nämlich der Satz:

Satz 7.[1]) *Jede unter Vermittlung einer stetigen Funktion $g(s)$ durch das Integral*

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)g(t)\,dt$$

darstellbare Funktion ist in eine nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe auf Fouriersche Weise entwickelbar, wie folgt

$$f(s)=c_1\psi^{(1)}(s)+c_2\psi^{(2)}(s)+\cdots,$$

$$c_m=\int_a^b f(s)\psi^{(m)}(s)\,ds.$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

1) Vgl. die auf E. Schmidt bezügliche Anmerkung in Kapitel XIV sowie den dort von mir gegebenen Beweis des Satzes 7 mittels der Methode der unendlichvielen Variabeln.

Den Beweis führen wir hier nur unter einer gewissen Voraussetzung über den Kern $K(s, t)$. Wir wollen nämlich eine symmetrische stetige Funktion $K(s, t)$ dann einen *allgemeinen Kern* nennen, wenn es möglich ist, zu jeder stetigen Funktion $g(s)$ und zu jedem beliebig kleinen positiven ε stets eine stetige Funktion $h(s)$ zu ermitteln, so daß, wenn

$$x(s) = g(s) - \int_a^b K(s, t) h(t) dt$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$\int_a^b (x(s))^2 ds < \varepsilon$$

gilt, d. h. der Kern $K(s, t)$ heißt *allgemein*, wenn das Integral

$$\int_a^b K(s, t) h(t) dt$$

bei geeigneter Wahl der stetigen Funktion $h(s)$ jede stetige Funktion $g(s)$ in dem eben bezeichneten Sinne angenähert darzustellen fähig ist. Nunmehr bezeichnen wir mit ε irgendeine beliebig kleine positive Größe; sodann bedeute M das Maximum der Funktion

$$\int_a^b (K(s, t))^2 dt,$$

wenn die Variabele s sich im Intervall a bis b bewegt. Da $K(s, t)$ ein allgemeiner Kern und $g(s)$ eine stetige Funktion sein soll, so läßt sich eine stetige Funktion $h(s)$ finden, so daß, wenn

$$x(s) = g(s) - \int_a^b K(s, t) h(t) dt$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$\int_a^b (x(s))^2 ds < \left(\frac{2\varepsilon}{3(1 + M)}\right) \tag{47}$$

erfüllt ist. Wir setzen

$$g^*(s) = \int_a^b K(s, t) h(t) dt,$$

$$f^*(s) = \int_a^b K(s, t) g^*(t) dt.$$

Nach Satz 4 gestattet die Funktion $f^*(s)$ die Reihenentwicklung nach Eigenfunktionen

$$f^*(s) = c_1^* \psi^{(1)}(s) + c_2^* \psi^{(2)}(s) + c_3^* \psi^{(3)}(s) + \cdots,$$

und wegen der gleichmäßigen und absoluten Konvergenz dieser Reihe ist es gewiß möglich, eine ganze Zahl m zu finden, so daß für alle s

(48) $$|f^*(s) - c_1^*\psi^{(1)}(s) - c_2^*\psi^{(2)}(s) - \cdots - c_m^*\psi^{(m)}(s)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ausfällt und auch die Ungleichungen noch gelten, die entstehen, wenn man m hierin durch eine größere Zahl ersetzt.

Nun ist

$$\left|\int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt\right| \leqq \left|\sqrt{\int_a^b (K(s,t))^2\,dt \cdot \int_a^b (x(t))^2\,dt}\right|$$

und mit Rücksicht auf (47) mithin

$$\leqq \left|\sqrt{M}\right| \frac{2\varepsilon}{3(1+M)} \leqq \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Wegen

(49) $$f(s) = f^*(s) + \int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt$$

haben wir folglich die Ungleichung

(50) $$|f(s) - f^*(s)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

Andererseits ist wegen (49)

$$c_j - c_j^* = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\,\psi^{(j)}(s)\,x(t)\,dt = \frac{1}{\lambda^{(j)}} \int_a^b \psi^{(j)}(t)\,x(t)\,dt$$

und folglich

(51) $$(c_j - c_j^*)\,\psi^{(j)}(s) = \int_a^b \psi^{(j)}(s)\,x(s)\,ds \cdot \int_a^b K(s,t)\,\psi^{(j)}(t)\,dt.$$

Nehmen wir

$$A = \frac{\int_a^b \psi^{(j)}(s)\,x(s)\,ds}{\sqrt[4]{\int_a^b (x(s))^2\,ds}}, \quad B = \sqrt[4]{\int_a^b (x(s))^2\,ds} \cdot \int_a^b K(s,t)\,\psi^{(j)}(t)\,dt,$$

so folgt wegen

$$|AB| \leqq \tfrac{1}{2}(A^2 + B^2)$$

aus (51) die Ungleichung

(52) $$|(c_j - c_j^*)\,\psi^{(j)}(s)| \leqq \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\int_a^b \psi^{(j)}(s)\,x(s)\,ds\right)^2}{\sqrt{\int_a^b (x(s))^2\,ds}} + \sqrt{\int_a^b (x(s))^2\,ds}\,\left(\int_a^b K(s,t)\,\psi^{(j)}(t)\,dt\right)^2\right\}\cdot$$

Wir wenden uns nunmehr zu der Formel (16) zurück. Da jedes Glied der Summe auf der rechten Seite dieser Formel (16) $\geqq 0$ ausfällt, so gilt für $m \leqq n$ die Ungleichung

$$\frac{D\left(l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(1)} d'(l^{(1)})} + \frac{D\left(l^{(2)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(2)} d'(l^{(2)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(m)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(m)} d'(l^{(m)})} \leqq [x, x].$$

Denken wir uns in dieser Formel wieder, wie früher

$$K_{pq} = K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right), \quad x_p = x\left(\frac{p}{n}\right)$$

eingesetzt und sodann nach Division durch n, während m festbleibt, den Grenzübergang für $n = \infty$ ausgeführt, so entsteht die Ungleichung

$$(53) \quad \left\{\int_0^1 \psi^{(1)}(s) x(s)\, ds\right\}^2 + \left\{\int_0^1 \psi^{(2)}(s) x(s)\, ds\right\}^2 + \cdots + \left\{\int_0^1 \psi^{(m)}(s) x(s)\, ds\right\}^2 \leqq \int_0^1 (x(s))^2\, ds.$$

Mit Benutzung dieser Ungleichung, in der wir wieder die Integrationsgrenzen a bis b eingeführt annehmen, folgt, wenn wir (52) für $j = 1, 2, \ldots, m$ bilden und summieren:

$$\sum_{j=1,\ldots,m} |(c_j - c_j^*)\, \psi^{(j)}(s)| \leqq \tfrac{1}{2} \sqrt{\int_a^b (x(s))^2\, ds}\ (1 + M)$$

oder im Hinblick auf (47)

$$\leqq \tfrac{1}{2} \frac{2\varepsilon}{3(1 + M)} (1 + M) = \frac{\varepsilon}{3},$$

d. h. es ist auch

$$(54) \quad |c_1 \psi^{(1)}(s) + \cdots + c_m \psi^{(m)}(s) - c_1^* \psi^{(1)}(s) - \cdots - c_m^* \psi^{(m)}(s)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Aus (48), (50), (54) folgt für alle s

$$|f(s) - c_1 \psi^{(1)}(s) - c_2 \psi^{(2)}(s) - \cdots - c_m \psi^{(m)}(s)| < \varepsilon,$$

und man sieht zugleich, daß diese Ungleichung gültig bleibt, wenn man auf der linken Seite statt m eine größere Zahl wählt; damit ist der Beweis für unseren Satz unter den gemachten Voraussetzungen erbracht.

Auf Grund des eben bewiesenen Satzes 7 läßt sich auch zeigen, daß die unendliche Reihe

$$\left(\int_a^b \psi^{(1)}(s) x(s)\, ds\right)^2 + \left(\int_a^b \psi^{(2)}(s) x(s)\, ds\right)^2 + \cdots$$

konvergiert und den Wert

$$\int_a^b (x(s))^2\, ds$$

besitzt; dabei ist wiederum $K(s, t)$ als allgemeiner Kern vorausgesetzt, und $x(s)$ bedeutet eine beliebige stetige Funktion.

Fünftes Kapitel.

Das Variationsproblem, das der algebraischen Frage nach den Minima und Maxima einer quadratischen Form entspricht.

Die im dritten und vierten Kapitel entwickelte Theorie ist für die Variationsrechnung von besonderer Bedeutung. Ich möchte jedoch hier nur dasjenige transzendente Problem behandeln, welches der algebraischen Frage nach den relativen Maxima und Minima einer quadratischen Form bei Konstanz einer zweiten anderen Form entspricht: es ist dies das Problem, diejenigen Funktionen $x(s)$ zu finden, für welche das Doppelintegral

$$J(x) = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt$$

minimale oder maximale Werte besitzt, während die Nebenbedingung

$$\int_a^b (x(s))^2\, ds = 1 \tag{55}$$

erfüllt ist.

Wenn der Kern $K(s, t)$ die Eigenschaft hat, daß das Integral $J(x)$ nur positive Werte besitzt, was auch $x(s)$ für eine stetige Funktion sei, und Null nur für $x(s) = 0$ wird, so heiße der *Kern* $K(s, t)$ *definit.* Wir machen im folgenden die Annahme, *daß* $K(s, t)$ *ein definiter Kern sei.*

Wenn für eine gewisse stetige Funktion $x(s)$ identisch in allen s

$$\int_a^b K(s,t)\, x(t)\, dt = 0$$

wird, so folgt offenbar $J(x) = 0$ und hieraus auch $x(s) = 0$, d. h. *ein definiter Kern ist stets auch ein abgeschlossener Kern;* es gibt für ihn also gewiß unendlich viele Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Die Eigenwerte eines definiten Kerns sind stets positiv. Denn fiele im Gegenteil etwa $\lambda^{(h)}$ negativ aus, so würde sich aus

$$J(x) = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \left\{ \int_a^b \psi^{(1)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2 + \frac{1}{\lambda^{(2)}} \left\{ \int_a^b \psi^{(2)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2 + \cdots \tag{56}$$

für $x(s) = \psi^{(h)}(s)$ der Wert des Doppelintegrals $J(x)$ negativ ergeben.

Betreffs der Minima und Maxima von $J(x)$ gelten folgende Sätze:

Satz 8. *Es gibt keine stetige Funktion* $x(s)$, *welche das Doppelintegral* $J(x)$ *zu einem Minimum macht, während die Nebenbedingung* (55) *erfüllt ist.*

In der Tat, die Eigenfunktionen $\psi^{(1)}(s)$, $\psi^{(2)}(s)$, ... erfüllen sämtlich die Nebenbedingung (55); wegen

$$J(\psi^{(1)}) = \frac{1}{\lambda^{(1)}},\quad J(\psi^{(2)}) = \frac{1}{\lambda^{(2)}},\ \ldots$$

könnte daher der gewünschte Minimalwert nur gleich Null sein; diesen Wert nimmt $J(x)$ aber nur für $x(s) = 0$ an.

Satz 9. *Der größte Wert, den das Doppelintegral $J(x)$ annimmt, falls $x(s)$ eine stetige der Nebenbedingung (55) genügende Funktion sein soll, ist $\frac{1}{\lambda^{(1)}}$; denselben nimmt das Doppelintegral für $x(s) = \psi^{(1)}(s)$ an.*

Sei nämlich im Gegenteil $x(s)$ eine Funktion, die der Nebenbedingung (55) genügt und für welche

$$J(x) > \frac{1}{\lambda^{(1)}}$$

ausfiele, so müßte sich eine ganze Zahl m so wählen lassen, daß auch die Summe $S(x)$ der ersten m Glieder rechter Hand in (56) größer als $\frac{1}{\lambda^{(1)}}$ wird. Nunmehr setzen wir

$$x(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + \cdots + c_m\psi^{(m)}(s) + y(s),$$

wo zur Abkürzung

$$c_h = \int_a^b \psi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

gesetzt ist und demnach

$$\int_a^b \psi^{(h)}(s)\, y(s)\, ds = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

ausfällt; wir finden dann leicht

$$(57)\qquad \int_a^b (x(s))^2 ds = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_m^2 + \int_a^b (y(s))^2 ds,$$

$$(58)\qquad S(x) = \frac{c_1^2}{\lambda^{(1)}} + \frac{c_2^2}{\lambda^{(2)}} + \cdots + \frac{c_m^2}{\lambda^{(m)}}.$$

Aus (57) folgt mit Rücksicht auf (55)

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_m^2 \leqq 1;$$

um so mehr ist also

$$\frac{c_1^2}{\lambda^{(1)}} + \frac{c_2^2}{\lambda^{(2)}} + \cdots + \frac{c_m^2}{\lambda^{(m)}} \leqq \frac{1}{\lambda^{(1)}},$$

und diese Gleichung steht mit (58) in Widerspruch, da $S(x)$ größer als $\frac{1}{\lambda^{(1)}}$ sein sollte; die ursprünglich gemachte Annahme trifft mithin nicht zu.

In analoger Weise erkennen wir die Richtigkeit des folgenden allgemeineren Satzes:

Satz 10. *Der größte Wert, den das Doppelintegral $J(x)$ annimmt, falls $x(s)$ eine stetige Funktion sein soll, die den Nebenbedingungen*

$$\int_a^b (x(s))^2\,ds = 1,$$

$$\int_a^b \psi^{(h)}(s)\,x(s)\,ds = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m-1)$$

genügt, ist $\frac{1}{\lambda^{(m)}}$; *denselben nimmt das Doppelintegral für* $x(s) = \psi^{(m)}(s)$ *an.*

Durch ähnliche Schlüsse erlangen wir auch die Lösung weiterer Maximalprobleme. Beispielsweise gelingt ohne wesentliche Schwierigkeit die Auffindung der Funktion $x(s)$, die das Integral $J(x)$ zu einem Maximum macht, wenn außer der Nebenbedingung (55) noch die folgende Nebenbedingung

$$(59) \qquad \int_a^b f(s)\,x(s)\,ds = 0$$

erfüllt sein soll, wobei $f(s)$ irgendeine gegebene Funktion bedeutet.

Wenn der Kern $K(s, t)$ die Eigenschaft besitzt, stets positive Werte anzunehmen, sobald $x(s)$ eine dieser Nebenbedingung (59) genügende stetige Funktion ist, so heiße er kurz *relativ definit.*

Unter den Eigenwerten eines relativ definiten Kernes ist höchstens einer negativ. Denn wären etwa $\lambda^{(1)}$ und $\lambda^{(2)}$ negativ, so bestimme man die Konstanten c_1, c_2 derart, daß die Funktion

$$x(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s)$$

der Nebenbedingung (59) genügt, und überdies $c_1^2 + c_2^2 = 1$ ausfällt: alsdann fällt nach (56) gewiß $J(x)$ negativ aus.

Sechstes Kapitel.

Ergänzung und Erweiterung der Theorie.

Wir haben bisher im ersten bis fünften Kapitel stets vorausgesetzt, daß $K(s, t)$ eine *stetige* Funktion der Veränderlichen s, t sei; es ist unsere nächste Aufgabe, festzustellen, inwieweit sich diese Annahme beseitigen läßt.

Wenn es eine endliche Anzahl von analytischen Linien L

$$s = F(t) \text{ oder } t = G(s)$$

in der st-Ebene gibt, so daß $K(s, t)$ in den Punkten dieser Linien unstetig oder unendlich wird, während für einen gewissen positiven, unterhalb $\frac{1}{2}$ liegenden Exponenten α das Produkt

$$(s - F(t))^\alpha K(s, t) \text{ bzw. } (t - G(s))^\alpha K(s, t)$$

daselbst stetig bleibt, so sagen wir, daß $K(s, t)$ *Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung besitzt.* Dabei setzen wir voraus, daß $K(s, t)$ außerhalb der Linien L durchweg stetig sei. Nunmehr stellen wir die Behauptung auf:

Die sämtlichen im dritten bis fünften Kapitel bewiesenen Resultate sind gültig, auch wenn der Kern $K(s, t)$ der zugrunde gelegten Integralgleichung Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung besitzt. Zugleich dürfen auch die in unserer Theorie auftretenden Funktionen $x(s)$, $y(s)$ solche Funktionen sein, die an einer endlichen Anzahl von Stellen von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung unendlich werden, wenn sie sonst stetige Funktionen von s sind.

Die Methode, mittelst der wir die Gültigkeit dieser Behauptung erkennen, besteht darin, daß wir die Linien L durch Gebietsstreifen der st-Ebene von beliebig geringer Breite ε ausschließen und alsdann eine Funktion $K_\varepsilon(s, t)$ konstruieren, die innerhalb jener Gebietsstreifen Null ist, während sie außerhalb derselben mit $K(s, t)$ übereinstimmt. Die Funktion $K_\varepsilon(s, t)$ ist überall stetig mit Ausnahme der Grenzlinien jener Gebietsstreifen, in denen sie, wie man sieht, sprungweise Wertänderungen erfährt. Für einen solchen Kern wie $K_\varepsilon(s, t)$, dessen Werte überall unterhalb einer endlichen Grenze bleiben und nur in gewissen Linien unstetig werden, sind unsere früheren Beweise unverändert gültig. Um ihre Gültigkeit für den Kern $K(s, t)$ zu erkennen, bedarf es der Ausführung des Grenzüberganges für $\varepsilon = 0$. Wir wollen im folgenden auseinandersetzen, wie dies zu geschehen hat.

Zu dem Zwecke wenden wir uns zunächst zu den Potenzreihen $\delta(\lambda)$ S. 9 und $\Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right)$ S. 11. Die Koeffizienten δ_h bzw. $\Delta_h\binom{x}{y}$ derselben lassen sich für den Kern $K(s, t)$ gewiß dann nicht bilden, wenn $K(s, s)$ als Funktion von s keine Bedeutung hat, d. h. sobald die Linie $s = t$ oder ein Teil derselben zu den singulären Linien des Kerns gehört. Diesem Übelstande helfen wir dadurch ab, daß wir an Stelle der früher angewandten Formeln für δ_h S. 9 bzw. $\Delta_h\binom{x}{y}$ S. 11 die folgenden eingesetzt denken

$$\delta_h = \frac{1}{h!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} 0\ , & K(s_1, s_2), & \ldots, & K(s_1, s_h) \\ K(s_2, s_1), & 0, & \ldots, & K(s_2, s_h) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(s_h, s_1), & K(s_h, s_2), & \ldots, & 0 \end{vmatrix} ds_1 \cdots ds_h,$$

$$\Delta_h\binom{x}{y} = \frac{1}{h!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} 0\ , & x(s_1)\ , & x(s_2)\ , & \ldots, & x(s_h) \\ y(s_1), & 0\ , & K(s_1, s_2), & \ldots, & K(s_1, s_h) \\ y(s_2), & K(s_2, s_1), & 0, & \ldots, & K(s_2, s_h) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y(s_h), & K(s_h, s_1), & K(s_h, s_2), & \ldots, & 0 \end{vmatrix} ds_1 \ldots ds_h.$$

Wie man sieht, unterscheiden sich die neuen Ausdrücke für δ_h bzw. $\Delta_h\binom{x}{y}$ von den früheren nur dadurch, daß in der Determinante die Elemente der Diagonalreihe überall 0 sind. Die mit den neuen Koeffizienten gebildeten Potenzreihen $\delta(\lambda)$ bzw. $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ stimmen mit den früheren bis auf einen unwesentlichen Exponentialfaktor überein, der für $\delta(\lambda)$ und $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ derselbe ist und daher bei der Bildung des Quotienten $\dfrac{\Delta\left(\lambda, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)}{\delta(\lambda)}$ wegfällt.[1])

Hilfssatz 3. Die neuen Ausdrücke δ_h und $\Delta_h\binom{x}{y}$ haben für unsern Kern $K(s, t)$ stets einen Sinn und die mit ihnen gebildeten Potenzreihen $\delta(\lambda)$ und $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ in λ sind beständig konvergent.

Wir wollen der Einfachheit halber den Beweis hierfür nur in dem Falle erbringen, daß $s = t$ die einzige singuläre Linie von $K(s, t)$ ist. In dem h-fachen Integrale für δ_h sollen die Integrationsveränderlichen $s_1, \ldots, s_h$ alle Werte zwischen 0 und 1 durchlaufen. Wir betrachten zunächst den $h!$-ten Teil T dieses h-dimensionalen Integrationsgebietes, der durch die Ungleichungen

$$s_1 > s_2 > \cdots > s_h$$

charakterisiert ist. Wir denken uns dann in der h-reihigen Determinante, die im Ausdruck für δ_h auftritt, die Elemente

der ersten Horizontalreihe		mit	$\lvert (s_1 - s_2)^\alpha \rvert$
„ zweiten	„	„	$\{\lvert (s_1 - s_2)^{-\alpha} \rvert + \lvert (s_2 - s_3)^{-\alpha} \rvert\}^{-1}$
„ dritten	„	„	$\{\lvert (s_2 - s_3)^{-\alpha} \rvert + \lvert (s_3 - s_4)^{-\alpha} \rvert\}^{-1}$
. . . . . .	. . .	. . .	. . . .
„ h-ten	„	„	$\lvert (s_{h-1} - s_h)^\alpha \rvert$

multipliziert; dadurch entsteht eine Determinante, deren Elemente, wie man leicht sieht, gewiß sämtlich für alle Werte der Variabeln absolut genommen unterhalb einer endlichen positiven Größe K liegen. Der Wert der letzteren Determinante ist gewiß $\leq \sqrt{h^h}\, K^h$, und folglich ergibt sich für das über T erstreckte h-fache Integral als obere Grenze der Ausdruck

$$(60) \qquad \sqrt{h^h} K^h \int \cdots \int \lvert (s_1 - s_2)^{-\alpha} \rvert \{\lvert (s_1 - s_2)^{-\alpha} \rvert + \lvert (s_2 - s_3)^{-\alpha} \rvert\}$$
$$\{\lvert (s_2 - s_3)^{-\alpha} \rvert + \lvert (s_3 - s_4)^{-\alpha} \rvert\} \cdots \lvert (s_{h-1} - s_h)^{-\alpha} \rvert\, ds_1 ds_2 \cdots ds_h,$$
$$1 > s_1 > s_2 > \cdots > s_h > 0.$$

Wenn wir in dem h-fachen Integral hier die neuen Veränderlichen

$$s_1 - s_2 = \sigma_1, \; s_2 - s_3 = \sigma_2, \; \ldots, \; s_{h-1} - s_h = \sigma_{h-1}, \; s_h = \sigma_h$$

1) Vgl. Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichungen, § 5. Göttinger Nachr. 1902.

einführen und die Produkte unter den Integralzeichen ausmultiplizieren, so erkennen wir, daß jenes Integral sich aus 2^{h-2} h-fachen Integralen von folgender Gestalt zusammensetzt:

$$\int\cdots\int \sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\cdots\sigma_h^{\alpha_h}\,d\sigma_1\,d\sigma_2\cdots d\sigma_h, \qquad (61)$$
$$\begin{pmatrix}\sigma_1>0,\ \sigma_2>0,\ \ldots,\ \sigma_h>0\\ \sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_h<1\end{pmatrix}$$

wo die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ die Werte $0, -\alpha$ oder -2α haben, ihre Summe $\alpha_2+\alpha_2+\cdots+\alpha_h$ jedoch stets gleich $-h\alpha$ ausfällt. Die Berechnung des Integrals (61) liefert für dasselbe als obere Grenze einen Ausdruck

$$\frac{A^h}{\Gamma(1+h-\alpha h)}<\frac{B^h}{h^{h(1-\alpha)}},$$

wo A, B gewisse von h unabhängige positive Größen bedeuten, und hieraus folgt für (60) eine obere Grenze

$$\frac{C^h}{h^{h(\frac{1}{2}-\alpha)}}, \qquad (62)$$

wo C wiederum eine von h unabhängige positive Größe darstellt. Der Ausdruck (62) ist zugleich eine obere Grenze für den über T erstreckten Teil des h-fachen Integrales, das in δ_h auftritt. Da aber alle übrigen $h!-1$ Teile jenes h-fachen Integrales, wie sich bei Vertauschung der Integrationsveränderlichen zeigt, den gleichen Wert besitzen, so folgt, daß das vollständige h-fache Integral, das in δ_h auftritt, den mit $h!$ multiplizierten Ausdruck (62) zur oberen Grenze hat, d. h. es ist

$$|\delta_h|\leqq\frac{C^h}{h^{h(\frac{1}{2}-\alpha)}}. \qquad (63)$$

Wegen $\alpha<\frac{1}{2}$ folgt hieraus die Richtigkeit des Hilfssatzes 3 in betreff der Potenzreihe $\delta(\lambda)$.[1])

Die nämliche Beweisführung gelingt für die Potenzreihe $\varDelta\left(\lambda, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$.

Wir kehren nun zu dem Kern $K_\varepsilon(s,t)$ zurück; erinnern wir uns, wie $K_\varepsilon(s,t)$ aus $K(s,t)$ durch Ausschalten der singulären Stellen entstand, so erhellt, daß $K_\varepsilon(s,t)$ als abhängig von der Streifenbreite ε zu betrachten ist. Da für ein bestimmtes ε $K_\varepsilon(s,t)$ absolut genommen stets unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, so ist unsere frühere Theorie für $K_\varepsilon(s,t)$ unverändert gültig. Wir bezeichnen die hier zu $K_\varepsilon(s,t)$ gehörigen Potenzreihen in λ mit $\delta_\varepsilon(\lambda)$ bzw. $\varDelta_\varepsilon\left(\lambda, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$. Da offenbar die Ungleichung (63)

1) Die Darstellung dieses Beweises in den früher genannten Dissertationen von Kellogg und Andrae ist unrichtig.

und die entsprechende für $\Delta_h\binom{x}{y}$ um so mehr für die Koeffizienten der Potenzreihen $\delta_\varepsilon(\lambda)$ bzw. $\Delta_\varepsilon\left(\lambda, \frac{x}{y}\right)$ gültig sind, so erkennen wir durch das nämliche Schlußverfahren, wie wir es zum Beweise des Hilfssatzes 1 (Kap. II) angewandt haben, die Richtigkeit der folgenden Tatsache:

Hilfssatz 4. Die Funktionen $\delta_\varepsilon(\lambda)$ bzw. $\Delta_\varepsilon\left(\lambda, \frac{x}{y}\right)$ konvergieren für $\varepsilon = 0$ gegen $\delta(\lambda)$ bzw. $\Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right)$, und zwar ist diese Konvergenz eine gleichmäßige für alle Werte von λ, deren absoluter Betrag unterhalb einer beliebig gewählten positiven Grenze Λ gelegen ist.

Es ist nicht schwer, nach diesen Vorbereitungen die Gültigkeit unseres grundlegenden Theorems S. 19 auf den Fall auszudehnen, daß der Kern $K(s, t)$ Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung aufweist.

Für den Kern $K_\varepsilon(s, t)$ ist unser Theorem bereits als gültig erkannt, vorausgesetzt, daß die Nullstellen der zugehörigen Funktion $\delta_\varepsilon(\lambda)$ sämtlich einfach sind. Sollte diese Voraussetzung für einen Kern $K_\varepsilon(s, t)$ nicht zutreffen, so denke man sich — ähnlich wie zu Beginn des dritten Kapitels ausgeführt worden ist — den betreffenden Kern $K_\varepsilon(s, t)$ ein wenig modifiziert, so daß jener Voraussetzung genügt wird und doch die modifizierten Ausdrücke für $\varepsilon = 0$ nach denselben Grenzen $K(s, t)$ bzw. $\delta(\lambda)$ $\Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right)$ gleichmäßig konvergieren.

Es sei jetzt Λ irgendeine positive Größe; aus Hilfssatz 4 kann dann geschlossen werden, daß diejenigen Nullstellen $\lambda_\varepsilon^{(h)}$ von $\delta_\varepsilon(\lambda)$, deren absolute Beträge auch für $\varepsilon = 0$ unterhalb Λ bleiben, in der Grenze für $\varepsilon = 0$ in die Nullstellen $\lambda^{(h)}$ von $\delta(\lambda)$, die absolut genommen unterhalb Λ liegen, übergehen, und daß die zu jenen Nullstellen $\lambda_\varepsilon^{(h)}$ zugehörigen Werte von $\Delta_\varepsilon\left(\lambda_\varepsilon^{(h)}, \frac{x}{y}\right)$ bei diesem Grenzübergang $\varepsilon = 0$ in die bezüglichen Werte von $\Delta\left(\lambda^{(h)}, \frac{x}{y}\right)$ übergehen.

Wir bezeichnen nun die zum Kern $K_\varepsilon(s, t)$ gehörigen Eigenfunktionen mit $\psi_\varepsilon^{(1)}(s)$, $\psi_\varepsilon^{(2)}(s)$, ... Da wegen (53) S. 27 für jedes noch so große m die Ungleichung

$$\left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(1)}(s)x(s)\,ds\right\}^2 + \left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(2)}(s)x(s)\,ds\right\}^2 + \cdots$$
$$+ \left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(m)}(s)x(s)\,ds\right\}^2 \leqq \int_a^b (x(s))^2\,ds$$

gilt, so ist auch gewiß:

$$(64)\qquad \sum_{(\lambda_\varepsilon^{(h)} \geqq \varLambda)} \left\{ \int_a^b \psi_\varepsilon^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2 \leqq \int_a^b (x(s))^2 ds.$$

Nunmehr setzen wir in der Formel (44) unseres Theorems an Stelle von $y(s)$ die Funktion $x(s)$ ein und schreiben die entstehende Formel dann in der Gestalt

$$(65)\qquad \int_a^b\!\!\int_a^b K_\varepsilon(s,t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{(\lambda_\varepsilon^{(h)} < \varLambda)} \frac{1}{\lambda_\varepsilon^{(h)}} \left\{ \int_a^b \psi_\varepsilon^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2 + \sum_{(\lambda_\varepsilon^{(h)} \geqq \varLambda)} \frac{1}{\lambda_\varepsilon^{(h)}} \left\{ \int_a^b \psi_\varepsilon^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2;$$

dabei soll die erstere Summe rechter Hand über alle Eigenfunktionen $\psi_\varepsilon^{(h)}(s)$ erstreckt werden, deren zugehörige Eigenwerte $\lambda_\varepsilon^{(h)}$ absolut genommen unterhalb $\varLambda$ bleiben, während die zweite Summe rechter Hand ebenso wie die Summe linker Hand in (64) alle übrigen Glieder enthält. Wegen (64) folgt aus (65) die Gleichung:

$$\int_a^b\!\!\int_a^b K_\varepsilon(s,t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{(\lambda_\varepsilon^{(h)} < \varLambda)} \frac{1}{\lambda_\varepsilon^{(h)}} \left\{ \int_a^b \psi_\varepsilon^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2 \pm \frac{\vartheta}{\varLambda} \int_a^b (x(s))^2 ds, \quad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

und durch Grenzübergang für $\varepsilon = 0$ entsteht hieraus:

$$\int_a^b\!\!\int_a^b K(s,t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{(\lambda^{(h)} < \varLambda)} \frac{1}{\lambda^{(h)}} \left\{ \int_a^b \psi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2 \pm \frac{\vartheta}{\varLambda} \int_a^b (x(s))^2 ds. \quad (0 \leqq \vartheta \leqq 1).$$

Wenn wir nun $\varLambda$ über jede Grenze zunehmen lassen, so ergibt sich die Formel (44) unseres Theorems für den Kern $K(s, t)$, im Falle $x(s) = y(s)$ genommen wird. Die letzte Einschränkung läßt sich sofort beseitigen.

Wir erkennen ohne Schwierigkeit auch alle früheren Folgerungen unseres Theorems für den Kern $K(s, t)$ als gültig, insbesondere die Sätze 4 und 7 über die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen, die zu $K(s, t)$ gehören.

Sollte der vorgelegte Kern $K(s, t)$ singuläre Linien von höherer als der $\frac{1}{2}$ten und niederer als erster Ordnung besitzen, so bedürfen unsere Sätze gewisser Modifikationen; man erkennt diese leicht, wenn man die zweifach bzw. mehrfach aus $K(s, t)$ zusammengesetzten Kerne (vgl. S. 20) bildet; bedenkt man, daß unter diesen Kernen stets solche Kerne vorhanden sein müssen, für die unsere oben dargelegte Theorie gültig ist, so ergeben sich die gewünschten Folgerungen für den Kern $K(s, t)$.

Wir haben bisher durchweg — auch in den Entwicklungen dieses Kapitels VI — die Voraussetzung gemacht, daß für den zugrunde

gelegten Kern $K(s,t)$ die Potenzreihe $\delta(\lambda)$ nur einfache Nullstellen besitzt. Es sind nunmehr die Modifikationen zu ermitteln, die unsere Theorie erfährt, wenn wir diese beschränkende Annahme fallen lassen.

Zu dem Zwecke sei $K(s,t)$ ein solcher Kern, zu dem $\lambda^{(h)}$ als n_h-facher Eigenwert gehört, d. h. $\lambda^{(h)}$ sei genau eine n_h-fache Nullstelle von $\delta(\lambda)$. Sodann bietet es keine erhebliche prinzipielle Schwierigkeit, einen Kern $K_\mu(s,t)$ von folgenden Eigenschaften zu finden: $K_\mu(s,t)$ sei eine solche Potenzreihe von μ, deren Koeffizienten stetige symmetrische Funktionen von s, t sind, die für genügend kleine Werte von μ konvergiert und für $\mu = 0$ in $K(s,t)$ übergeht. Es sei $\delta_\mu(\lambda)$ die fragliche zum Kern $K_\mu(s,t)$ gehörige Potenzreihe, so daß $\delta_\mu(\lambda)$ für $\mu = 0$ in die zu $K(s,t)$ gehörige Potenzreihe $\delta(\lambda)$ übergeht; $\delta_\mu(\lambda)$ wird, wie man aus dem früheren Beweise leicht erkennt, eine Potenzreihe in λ, die für alle λ und genügend kleine μ konvergiert; diese Konvergenz ist außerdem für alle absolut unterhalb einer endlichen Grenze $\varDelta$ liegenden λ bei genügend kleinem μ gewiß eine gleichmäßige, so daß $\delta_\mu(\lambda)$ auch als Potenzreihe in λ und μ darstellbar ist. Endlich gestatte — so sei der Parameter μ gewählt — die Gleichung

$$\delta_\mu(\lambda) = 0$$

in der Umgebung von $\lambda = \lambda^{(h)}$ die folgenden n_h Auflösungen:

$$(66)\qquad \begin{aligned} \lambda_\mu^{(h)} &= \mathfrak{P}(\mu), \\ \lambda_\mu^{(h+1)} &= \mathfrak{P}_1(\mu), \\ &\cdots\cdots \\ \lambda_\mu^{(h+n_h-1)} &= \mathfrak{P}_{n_h-1}(\mu); \end{aligned}$$

hierin sollen $\mathfrak{P}(\mu)$, $\mathfrak{P}_1(\mu)$, ... $\mathfrak{P}_{n_h-1}(\mu)$ Potenzreihen in μ bedeuten, und unter diesen seien keine zwei in μ einander identisch gleich. Die letztere Festsetzung bringt die für die nachfolgenden Entwicklungen wesentliche Eigenschaft der Funktion $K_\mu(s,t)$ zum Ausdruck, die darin besteht, daß für alle genügend kleinen, von Null verschiedenen Werte des Parameters μ die Funktion $K_\mu(s,t)$ einen Kern darstellt, der lauter einfache Eigenwerte besitzt. Wir bilden nunmehr für $K_\mu(s,t)$ nach Art von (27) die Potenzreihe $\varDelta_\mu(\lambda; s,t)$, die für $\mu = 0$ in die zu $K(s,t)$ gehörige Potenzreihe $\varDelta(\lambda; s,t)$ übergeht. $\varDelta_\mu(\lambda; s,t)$ ist gewiß für alle λ und genügend kleine μ ebenso wie $\delta_\mu(\lambda)$ gleichmäßig konvergent und auch als Potenzreihe von λ und μ darstellbar. Endlich konstruieren wir für $K_\mu(s,t)$ die zu

$$\lambda_\mu^{(h)},\ \lambda_\mu^{(h+1)},\ \ldots,\ \lambda_\mu^{(h+n_h-1)}$$

gehörigen normierten Eigenfunktionen

$$\psi_\mu^{(h)}(s),\ \psi_\mu^{(h+1)}(s),\ \ldots,\ \psi_\mu^{(h+n_h-1)}(s),$$

indem wir in $\delta_\mu(\lambda)$ und $\varDelta_\mu(\lambda; s, t)$ an Stelle von λ der Reihe nach aus (66) die Werte für $\lambda_\mu^{(h)}, \lambda_\mu^{(h+1)}, \ldots, \lambda_\mu^{(h+n_h-1)}$ als Potenzreihen in μ einsetzen; wir erhalten zunächst

$$\psi_\mu^{(h)}(s)\psi_\mu^{(h)}(t) = \frac{\varDelta_\mu(\lambda^{(h)}; s, t)}{\delta'_\mu(\lambda^{(h)})} = \mu^{\pm e}\{\Psi^{(h)}(s, t) + \Psi_1^{(h)}(s, t)\,\mu + \cdots\},$$

$$\psi_\mu^{(h+1)}(s)\psi_\mu^{(h+1)}(t) = \frac{\varDelta_\mu(\lambda^{(h+1)}; s, t)}{\delta'_\mu(\lambda^{(h+1)})} = \mu^{\pm e_1}\{\Psi^{(h+1)}(s, t) + \Psi_1^{(h+1)}(s, t)\,\mu + \cdots\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_\mu^{(h+n_h-1)}(s)\psi_\mu^{(h+n_h-1)}(t) = \frac{\varDelta_\mu(\lambda^{(h+n_h-1)}; s, t)}{\delta'_\mu(\lambda^{(h+n_h-1)})} = \mu^{\pm e_{n_h-1}}\{\Psi^{(h+n_h-1)}(s, t) + \Psi_1^{(h+n_h-1)}(s, t)\,\mu + \cdots\};$$

darin bedeuten $e, e_1, \ldots e_{n_h-1}$ gewisse ganze rationale Exponenten, die $\geqq 0$ sind; ferner bedeuten die Ausdrücke $\Psi(s, t)$ auf der rechten Seite stetige Funktionen von s, t. Es fällt nicht schwer, hieraus für die gesuchten Eigenfunktionen Formeln von folgender Art abzuleiten:

$$(67)\quad \begin{aligned} \psi_\mu^{(h)}(s) &= \mu^{\pm f}\{\psi^{(h)}(s) + \psi_1^{(h)}(s)\,\mu + \cdots\}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_\mu^{(h+n_h-1)}(s) &= \mu^{\pm f_{n_h-1}}\{\psi^{(h+n_h-1)}(s) + \psi_1^{(h+n_h-1)}(s)\,\mu + \cdots\}; \end{aligned}$$

darin bedeuten wiederum $f, f_1, \ldots, f_{n_h-1}$ gewisse ganze rationale Exponenten, die $\geqq 0$ sind. Ferner bedeuten die Ausdrücke $\psi^{(j)}(s)$ auf der rechten Seite stetige Funktionen von s, und insbesondere dürfen wir annehmen, daß von den Funktionen

$$(68)\qquad \psi^{(h)}(s),\ \psi^{(h+1)}(s),\ \ldots,\ \psi^{(h+n_h-1)}(s)$$

keine für alle s identisch gleich Null sei. Da andererseits für alle genügend kleinen von Null verschiedenen μ die Gleichungen

$$\int_a^b(\psi_\mu^{(h)}(s))^2\,ds = 1,\ \ldots,\ \int_a^b(\psi_\mu^{(h+n_h-1)}(s))^2\,ds = 1$$

bestehen müssen, so folgt, daß die Exponenten $f, f_1, \ldots, f_{n_h-1}$ sämtlich Null sind, und die Formeln (67) lehren dann, daß die Funktionen

$$\psi_\mu^{(h)}(s),\ \psi_\mu^{(h+1)}(s),\ \ldots,\ \psi_\mu^{h+n_h-1}(s)$$

für $\mu = 0$ stetig in die Funktionen (68) übergehen. Diese Funktionen (68) heißen *die zum n_h-fachen Eigenwert $\lambda^{(h)}$ gehörigen Eigenfunktionen;* sie erfüllen, wie man aus den Formeln für die Eigenfunktionen $\psi_\mu^{(1)}(s), \psi_\mu^{(2)}(s), \ldots$ durch Grenzübergang zu $\mu = 0$ sofort erkennt, die folgenden Gleichungen:

$$\int_a^b(\psi^{(k)}(s))^2\,ds = 1,$$

$$\int_a^b\psi^{(k)}(s)\psi^{(k')}(s)\,ds = 0,$$

$$(k = h, h+1, \ldots h+n_h-1;\ k' \neq k).$$

Wir wenden nunmehr die Formel (43) auf den Kern $K_\mu(s,t)$ an, wobei μ einen genügend kleinen von Null verschiedenen Wert bedeutet. Mit Rücksicht auf (39) erhalten wir

$$\left|\int_0^1\int_0^1 K_\mu(s,t)x(s)y(t)\,ds\,dt - \frac{1}{\lambda_\mu^{(1)}}\int_0^1 \psi_\mu^{(1)}(s)x(s)\,ds\cdot\int_0^1\psi_\mu^{(1)}(s)y(s)\,ds\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_\mu^{(2)}}\int_0^1 \psi_\mu^{(2)}(s)x(s)\,ds\cdot\int_0^1\psi_\mu^{(2)}(s)y(s)\,ds - \cdots - \frac{1}{\lambda_\mu^{(m)}}\int_0^1 \psi_\mu^{(m)}(s)x(s)\,ds\cdot\int_0^1\psi_\mu^{(m)}(s)y(s)\,ds\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\,|\lambda_\mu^{(m+1)}|}\left(\int_0^1 (x(s))^2 ds + \int_0^1 (y(s))^2 ds\right);$$

wenn wir hierin zur Grenze $\mu = 0$ übergehen und alsdann m über jede Grenze wachsen lassen, so erkennen wir, daß auch für den Kern $K(s,t)$ die Formel (44) des grundlegenden Theorems unverändert gültig bleibt; *man hat nur nötig, für den Fall eines n_h-fachen Eigenwertes $\lambda^{(h)}$ rechter Hand in* (44) *der Reihe nach jede der n_h verschiedenen, zu $\lambda^{(h)}$ gehörigen Eigenfunktionen zu berücksichtigen, so daß in jedem dieser n_h Glieder der reziproke Wert desselben Eigenwertes $\lambda^{(h)}$ als Faktor zu stehen kommt.*

Eine einfache Methode zur Berechnung der Eigenfunktionen (68) gewinnen wir, indem wir von der Formel

$$\int_a^b\int_a^b \mathsf{K}(\lambda; s,t)x(s)y(t)\,ds\,dt = \sum_{(h=1,2,\ldots)} \frac{1}{\lambda^{(h)}-\lambda}\int_a^b \psi^{(h)}(s)x(s)\,ds\cdot\int_a^b \psi^{(h)}(s)y(s)\,ds$$

ausgehen. Setzen wir hierin

$$\mathsf{K}(s,t) = -\frac{\Delta(\lambda;s,t)}{\delta(\lambda)}$$

ein, multiplizieren dann die Formel mit $\lambda - \lambda^{(h)}$ und gehen zur Grenze $\lambda = \lambda^{(h)}$ über, so erhalten wir schließlich:

$$\left\{\frac{\dfrac{\partial^{n_h-1}}{\partial\lambda^{n_h-1}}\Delta(\lambda;s,t)}{\dfrac{\partial^{n_h}}{\partial\lambda^{n_h}}\delta(\lambda)}\right\}_{\lambda=\lambda^{(h)}} = \psi^{(h)}(s)\psi^{(h)}(t) + \psi^{(h+1)}(s)\psi^{(h+1)}(t) + \cdots + \psi^{(h+n_h-1)}(s)\psi^{(h+n_h-1)}(t).$$

Durch diese Gleichung sind die zu dem n_h-fachen Eigenwerte $\lambda^{(h)}$ gehörigen Eigenfunktionen (68) eindeutig bestimmt, wenn man von einer unwesentlichen orthogonalen Kombination derselben mit konstanten Koeffizienten absieht.

Mittelst der eben bewiesenen Verallgemeinerung unseres grundlegenden Theorems sind wir imstande, auch die anderen im Falle mehrfacher Eigenwerte entstehenden Fragen ohne Schwierigkeit zu beantworten.

Zweiter Abschnitt.

Anwendung der Theorie auf lineare Differentialgleichungen.

In dem ersten Abschnitt haben wir die Theorie der Integralgleichungen zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) \, dt$$

behandelt und sind dabei zu einer Reihe allgemeiner Resultate über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den zum Kern $K(s, t)$ gehörigen Eigenfunktionen gelangt; wir behaupteten in der Einleitung, daß in diesen Resultaten als spezielle Fälle die Entwicklungen nach trigonometrischen, Besselschen, nach Kugel-, Laméschen und Sturmschen Funktionen, sowie die Entwicklungen nach denjenigen Funktionen mit mehr Veränderlichen enthalten sind, wie sie zuerst H. Poincaré bei seinen Untersuchungen über gewisse Randwertaufgaben in der Potentialtheorie nachwies. In dem folgenden zweiten Abschnitt soll diese Behauptung durch Erörterung einiger Anwendungen der Theorie im Gebiete der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen begründet werden; dabei werden die schönen und wichtigen Resultate E. Picards[1]), soweit diese die linearen Differentialgleichungen betreffen, auf das engste berührt.

Siebentes Kapitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Es sei u eine Funktion der Veränderlichen x, deren zwei erste Ableitungen innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ sowie an den Grenzen dieses Intervalles stetig sind; ferner sei p irgendeine innerhalb jenes Intervalles nebst der ersten Ableitung stetige Funktion von x, die überdies innerhalb des Intervalles positiv ausfällt; endlich sei q irgendeine innerhalb jenes Intervalles stetige Funktion von x: dann ist der allgemeinste homogene lineare, sich selbst adjungierte Differentialausdruck zweiter Ordnung von der Gestalt

$$L(u) \equiv \frac{d\left(p \frac{du}{dx}\right)}{dx} + qu \equiv p \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dp}{dx}\frac{du}{dx} + qu.$$

1) Vgl. insbesondere Traité d'analyse t. III chap. VI.

Bedeutet v ebenfalls eine Funktion von x mit stetiger erster und zweiter Ableitung, so gilt die sogenannte *Greensche Formel*

$$(1) \qquad \int_a^b \{vL(u) - uL(v)\}\,dx = \left[p\left\{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right\}\right]_a^b.$$

Der Kürze halber benutzen wir folgende Ausdrucksweise: Wenn eine Funktion die erste Ableitung besitzt und diese Ableitung stetig ist, so heiße die Funktion *(einmal) stetig differenzierbar* und, wenn auch ihre zweite Ableitung existiert und stetig ist, so heiße sie *zweimal stetig differentiierbar.*

Es sei $\gamma(x, \xi)$ eine Funktion der Variabeln x und des Parameters ξ, die in bezug auf x zweimal stetig differenzierbar ist und für alle von ξ verschiedenen Werte von x innerhalb des Intervalles a bis b der Differentialgleichung

$$L(u) = 0$$

genügt, die ferner für $x = \xi$ stetig verläuft, während ihre erste Ableitung für $x = \xi$ den Abfall -1 aufweist[1]), so daß

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{d\gamma}{dx}\right]_{x=\xi+\varepsilon} - \underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{d\gamma}{dx}\right]_{x=\xi-\varepsilon} = -1$$

wird: eine solche Funktion $\gamma(x, \xi)$ werde eine *Grundlösung der Differentialgleichung* $L(u) = 0$ für das Intervall $x = a$ bis $x = b$ genannt.

Sind $u_1(x)$, $u_2(x)$ zwei unabhängige partikuläre Lösungen von $L(u) = 0$, so läßt sich eine Grundlösung offenbar in der Gestalt darstellen

$$\gamma(x, \xi) = -\frac{1}{2}\frac{|x-\xi|}{x-\xi}\,\frac{u_2(\xi)u_1(x) - u_1(\xi)u_2(x)}{u_2(\xi)\dfrac{du_1(\xi)}{d\xi} - u_1(\xi)\dfrac{du_2(\xi)}{d\xi}}.$$

So besitzt beispielsweise die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

die Grundlösung

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}|x-\xi|;$$

ferner besitzen die Differentialgleichungen

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = 0,$$

$$(x^2-1)\frac{d^2u}{dx^2} + 2x\frac{du}{dx} = 0,$$

---

1) Diese Unstetigkeit hat wohl E. Picard (l. c.), den Begriff der Greenschen Funktion einer Veränderlichen dagegen H. Burkhardt zuerst eingeführt, Bull. soc. math. de France Bd. 22 (1894). Vgl. ferner die Inauguraldissertation von Ch. M. Mason, Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Göttingen 1903, sowie dessen Arbeit „Zur Theorie der Randwertaufgaben" Math. Ann. Bd. 58.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$$

bzw. die Grundlösungen

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\xi\,|lx - l\xi|,$$

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}(1 - \xi^2)\,\left| l\left(\frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\right|,$$

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\sin(|x - \xi|),$$

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}e^{|x-\xi|}.$$

Zu einer vorgelegten Differentialgleichung gibt es offenbar unendlich viele Grundlösungen; diese werden sämtlich aus einer von ihnen erhalten, wenn man derselben ein beliebiges Integral der Differentialgleichung hinzufügt, das an jeder Stelle innerhalb des Intervalles stetig differenzierbar ist. Für unsere weiteren Entwicklungen sind diejenigen Grundlösungen von besonderer Bedeutung, die an den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ des Intervalles gewisse homogene Bedingungen erfüllen. Die besonders in Betracht kommenden homogenen Randbedingungen sind folgende:

I. $\quad f(a) = 0, \qquad f(b) = 0,$

II. $\quad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = 0, \qquad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b} = 0;$

III. $\quad \left[\frac{df(x)}{dx} + hf\right]_{x=a} = 0, \qquad \left[\frac{df(x)}{dx} + kf\right]_{x=b} = 0;$

IV. $\quad f(a) = hf(b), \qquad p(a)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = \frac{p(b)}{h}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b};$

IV*. $\quad f(a) = hp(b)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b}, \qquad p(a)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = -\frac{1}{h}f(b).$

Bei der Anwendung dieser Randbedingungen I—IV* ist stets die Annahme zu machen, daß die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ auch in den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ stetig sind und ebenda die Funktion $p(x)$ von Null verschieden ausfällt. Ist diese Voraussetzung für einen Randpunkt oder beide Randpunkte nicht erfüllt, so wähle man als Randbedingung eine solche Forderung, durch welche an dem betreffenden Randpunkt ein Integral von $L(u) = 0$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt wird. Die einfachsten in unseren späteren Beispielen zur Anwendung kommenden Randbedingungen dieser Art bestehen für den Randpunkt $x = a$ in einer der Forderungen:

V. $f(x)$ soll bei der Annäherung an den Randpunkt $x = a$ endlich bleiben.

Diese Randbedingung ist zulässig, falls die Differentialgleichung $L(u) = 0$ an der Stelle $x = a$ ein endlich bleibendes Integral besitzt und außerdem die Funktion p in der Nähe von $x = a$ sich in der Gestalt

$$p(x) = (x - a)^s E(x)$$

darstellen läßt, wo s einen Exponenten $\geqq 1$ und $E(x)$ eine für $x = a$ endlich bleibende Funktion bedeutet. In der Tat, bezeichnet u_1 ein endlich bleibendes Integral, so stellen sich die von u_1 unabhängigen Integrale der Differentialgleichung $L(u) = 0$ in der Form

$$u_2 = u_1 \int \frac{dx}{p(x) u_1(x)^2}$$

dar, und diese wachsen wegen $s \geqq 1$ gewiß über alle Grenzen; die Bedingung der Endlichkeit bestimmt mithin ein Integral von $L(u) = 0$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig.

V*. $f(x)$ soll in der Nähe des Randpunktes $x = a$ sich in der Form $(x - a)^r e(x)$ darstellen lassen, wo $e(x)$ eine für $x = a$ endlich bleibende Funktion bedeutet.

Diese Randbedingung ist zulässig, falls die Differentialgleichung $L(u) = 0$ an der Stelle $x = a$ Integrale von eben jener Form $(x - a)^r e(x)$ besitzt und außerdem die Funktion p in der Nähe von $x = a$ sich in der Gestalt

$$p(x) = (x - a)^s E(x)$$

darstellen läßt, wo s einen Exponenten $\geqq 1 - 2r$ und $E(x)$ eine für $x = a$ endlich bleibende Funktion bedeutet. Der Beweis dafür, daß unter diesen Umständen die Forderung V* ein Integral von $L(u) = 0$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt; wird leicht wie im vorigen spezielleren Falle geführt.

Die Randbedingungen I—V (V*) sind stets so zu verstehen, daß $f(x)$ (bzw. $e(x)$) in dem betreffenden Randpunkt einmal stetig differenzierbar ist.

Die genannten Randbedingungen können noch in verschiedenster Weise miteinander kombiniert werden.

Eine Grundlösung $g(x, \xi)$ für das Intervall $x = a$ bis $x = b$, die an den Randpunkten zwei homogene Randbedingungen der genannten Art erfüllt, heiße *die zu diesen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung* $L(u) = 0$; ferner heiße der Quotient

$$G(x, \xi) = \frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$$

die zu jenen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$; wir bezeichnen die Greenschen Funktionen

je nach den Randbedingungen, zu denen sie gehören, auch als *Greensche Funktionen* G^{I}, G^{II}, G^{III}, G^{IV} oder G^{V}.

Beispielsweise lautet die Greensche Funktion G^{I} für den Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{d^2 u}{dx^2},$$

d. h. die zu den Randbedingungen I gehörige Greensche Funktion, für das Intervall 0 bis 1

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= (1-\xi)x, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= (1-x)\xi, \qquad (x \geqq \xi). \end{aligned}$$

Noch einfacher wird die Greensche Funktion für jenen Differentialausdruck, wenn wir am Randpunkt $x = 0$ die Bedingung I und am Randpunkt $x = 1$ die Bedingung II wählen; sie lautet dann

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= x, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= \xi, \qquad (x \geqq \xi). \end{aligned}$$

Ferner wird die Greensche Funktion G^{I} desselben Differentialausdruckes

$$L(u) \equiv \frac{d^2 u}{dx^2}$$

für das Intervall -1 bis $+1$ durch die Formel

$$G(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\{|x-\xi| + x\xi - 1\}$$

dargestellt.

Die Greensche Funktion G^{IV} $(h = -1)$ für denselben Differentialausdruck und das Intervall 0 bis 1, die also den Randbedingungen

$$f(0) = -f(1), \qquad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=0} = -\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=1}$$

genügt, lautet

$$G(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}.$$

Die Greensche Funktion des Differentialausdruckes

$$L(u) \equiv x\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx}$$

für das Intervall $x = 0$ bis $x = 1$, die am Randpunkt $x = 0$ der Bedingung V und am Randpunkt $x = 1$ der Bedingung I genügt, lautet:

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= l\xi, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= lx, \qquad (x \geqq \xi). \end{aligned}$$

Ein weiteres sehr interessantes Beispiel liefert der Differentialausdruck:

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{du}{dx}\right\} - \frac{4\alpha^2}{1-x^2}u,$$

wo α irgendeine positive Konstante bedeuten soll; die Greensche Funktion G^{V} für das Intervall $x = -1$ bis $x = +1$ ist:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha}, \qquad (x \leqq \xi),$$
$$= \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\,\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}, \qquad (x \geqq \xi).$$

Für die unendliche Gerade $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ besitzt der Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{d^2 u}{dx^2} - u$$

die Greensche Funktion G^{V}

$$G(x, \xi) = \tfrac{1}{2} e^{-|x-\xi|}.$$

Es kann vorkommen, daß für einen Differentialausdruck $L(u)$ bei gewissen Randbedingungen keine Greensche Funktion im eben definierten Sinne vorhanden ist; in diesem Falle existiert, wie aus den späteren allgemeinen Entwicklungen im Kap. IX sowie Kap. XVIII folgt, eine nicht identisch verschwindende Lösung $\psi^{(0)}(x)$ der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die überall innerhalb des Intervalles stetig differenzierbar ist und den betreffenden Randbedingungen genügt; dabei sei der noch willkürliche konstante Faktor so bestimmt, daß

$$\int_a^b (\psi^{(0)}(x))^2\, dx = 1$$

wird. Wir konstruieren dann ein Integral $g(x, \xi)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u) = p(\xi)\,\psi^{(0)}(x)\,\psi^{(0)}(\xi),$$

dessen Ableitung an der Stelle $x = \xi$ den Abfall -1 erfährt, während $g(x, \xi)$ an allen anderen Stellen innerhalb des Intervalles stetig differenzierbar ist, an den Randpunkten die betreffenden Randbedingungen und überdies die Gleichung

$$\int_a^b g(x, \xi)\,\psi^{(0)}(x)\, dx = 0$$

erfüllt; die Funktion

$$G(x, \xi) = \frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$$

genügt der Differentialgleichung

$$L(u) = \psi^{(0)}(x)\,\psi^{(0)}(\xi).$$

Diese Funktionen $g(x, \xi)$ bzw. $G(x, \xi)$ leisten die nämlichen Dienste wie sonst die Greensche Funktion und werden daher in dem vorliegenden besonderen Falle als *Greensche Funktionen im erweiterten Sinne* bezeichnet. Existiert auch diese Funktion nicht, so kann man einen analogen weiteren Schritt tun, um zu einer geeigneten Greenschen Funktion zu gelangen.

Als Beispiel diene der Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{d^2u}{dx^2}$$

mit den Randbedingungen IV ($h = 1$) für das Intervall -1 bis $+1$, so daß die Bedingungen lauten:

$$f(-1) = f(+1), \quad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=-1} = \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=+1}.$$

In der Tat existiert hier eine von Null verschiedene Lösung der homogenen Differentialgleichung, nämlich $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, die die Randbedingungen erfüllt, und die Greensche Funktion im eben erklärten erweiterten Sinne wird:

$$G(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}|x - \xi| + \tfrac{1}{4}(x - \xi)^2 + \tfrac{1}{6}.$$

Ein anderes Beispiel für das letztere Vorkommnis liefert der Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{d\left\{(1 - x^2)\frac{du}{dx}\right\}}{dx}$$

für das Intervall -1 bis $+1$ bei den Randbedingungen V. Auch hier ist $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und die Greensche Funktion im erweiterten Sinne lautet

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= -\tfrac{1}{2} l\{(1 - x)(1 + \xi)\} + c, \quad (x \leqq \xi), \\ &= -\tfrac{1}{2} l\{(1 + x)(1 - \xi)\} + c, \quad (x \geqq \xi), \end{aligned}$$

wo c den numerischen Wert $l2 - \frac{1}{2}$ bedeutet.

Setzen wir in der Greenschen Formel (1) an Stelle von $u(x)$, $v(x)$ bzw. die Funktionen $G(x, \xi)$, $G(x, \xi^*)$ und berücksichtigen die Unstetigkeit der Ableitungen dieser Funktionen an der Stelle $x = \xi$ in gehöriger Weise, indem wir dieselbe in ein kleines Intervall einschließen und dann den Grenzübergang zum verschwindenden Intervall ausführen, so finden wir leicht das *Symmetriegesetz der Greenschen Funktion eines Differentialausdruckes*

$$G(\xi, \xi^*) = G(\xi^*, \xi).$$

In allen oben berechneten Beispielen bestätigt sich dieses Symmetriegesetz.

Bezeichnet $\varphi(x)$ eine gegebene stetige Funktion der Variabeln x, und verstehen wir unter f eine überall stetig differenzierbare Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(f) = -\varphi(x), \tag{2}$$

die einem Paar unserer Randbedingungen I—V genügt, setzen wir dann in der Greenschen Formel (1) an Stelle von u die Lösung f und an Stelle

von v die zu jenen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$, so finden wir für jede der fünf Arten von Randbedingungen

$$\int_a^b G(x, \xi) L(f(x)) dx = f(\xi),$$

und hieraus ersehen wir mit Rücksicht auf das Symmetriegesetz der Greenschen Funktion, daß die Lösung $f(x)$ sich folgendermaßen durch ein bestimmtes Integral darstellt:

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi. \tag{3}$$

Daß die so dargestellte Funktion $f(x)$ wirklich den betreffenden Randbedingungen genügt, ist offenbar, weil $G(x, \xi)$ denselben genügt; die durch (3) dargestellte Funktion $f(x)$ genügt aber auch der Differentialgleichung (2), wie durch Rechnung leicht gezeigt wird. Wenn somit eine zweimal stetig differenzierbare und einem Paar unserer Randbedingungen I—V genügende Funktion $f(x)$ und irgendeine stetige Funktion $\varphi(x)$ durch die Relation (2) miteinander verknüpft sind, so folgt für dieselben notwendig auch die Relation (3), und umgekehrt, wenn für zwei solche Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ die Relation (3) besteht, so folgt für sie notwendig auch die Relation (2). Hieraus entnehmen wir sofort, daß einerseits die Funktion f unter Hinzunahme der betreffenden Randbedingungen durch die Differentialgleichung (2), wobei φ gegeben, und andrerseits die Funktion $\varphi(x)$ durch die Integralgleichung (3), wobei f gegeben, eindeutig bestimmt ist.

Die Gleichung (3) ist eine als Integralgleichung erster Art; $G(x, \xi)$ ist der Kern dieser Integralgleichung und wegen des Symmetriegesetzes eine symmetrische Funktion der Argumente.

Wir fassen die Ergebnisse der vorstehenden Entwicklungen, wie folgt, zusammen:

Satz 11. *Wenn die Greensche Funktion eines Differentialausdruckes* $L(u)$ *für irgendein Paar der Randbedingungen* I—V *als Kern einer Integralgleichung erster Art*

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

genommen wird, wo $f(x)$ *eine gegebene zweimal stetig differenzierbare Funktion ist, die den betreffenden Randbedingungen genügt, so besitzt diese Integralgleichung eine und nur eine Lösung* $\varphi(x)$, *und man erhält ihre Lösung durch die Formel*

$$\varphi(x) = - L(f(x));$$

umgekehrt, wenn $\varphi(x)$ *irgendeine stetige Funktion ist, und eine Lösung* $f(x)$ *der Differentialgleichung*

$$L(f(x)) + \varphi(x) = 0$$

gefunden werden soll, die einem ausgewählten Paar von Randbedingungen I—V *genügt, so ist diese Lösung dadurch eindeutig bestimmt, und man erhält sie durch die Formel*

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Aus diesem Satze entnehmen wir leicht, daß die Greensche Funktion $G(x, \xi)$ einen Kern darstellt, der nach der im ersten Abschnitt Kap. IV eingeführten Ausdrucksweise sowohl abgeschlossen wie auch allgemein ist.

In der Tat, sei $\varphi(x)$ eine solche Funktion, daß

$$\int_a^b G(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

identisch für alle x verschwindet, so müßte die Funktion $f(x) = 0$ der Differentialgleichung $L(f) = -\varphi$ genügen, und hieraus folgt, daß $\varphi(x)$ identisch für alle x verschwindet, d. h. $G(x, \xi)$ ist ein abgeschlossener Kern.

Andrerseits sei $g(x)$ irgendeine stetige Funktion; wir wählen dann eine zweimal stetig differenzierbare und den Randbedingungen genügende Funktion $g^*(x)$ derart, daß

$$\int_a^b (g(x) - g^*(x))^2\,dx$$

kleiner als die beliebig kleine positive Größe ε ausfällt: die stetige Funktion $h(x) = -L(g^*(x))$ erfüllt dann dasjenige Erfordernis, das unserer Definition zufolge einen allgemeinen Kern charakterisiert.

In den vorstehenden Betrachtungen spielte die Integralgleichung erster Art eine wesentliche Rolle; wir werden zu einer Integralgleichung zweiter Art gelangen, wenn wir neben $L(u)$ noch den Differentialausdruck

$$\Lambda(u) \equiv L(u) + \lambda u$$

betrachten, wo λ einen Parameter bezeichnet. Es sei wie bisher $G(x, \xi)$ die zu gewissen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Ausdruckes $L(u)$, und $\Gamma(x, \xi)$ die zu den nämlichen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Ausdruckes $\Lambda(u)$. Sodann wenden wir die Greensche Formel (1) an; nehmen wir

$$u(x) = G(x, \xi), \quad v(x) = \Gamma(x, \xi^*),$$

so erhalten wir

$$(4)\quad \Gamma(\xi, \xi^*) - G(\xi^*, \xi) = \lambda\int_a^b G(x, \xi)\,\Gamma(x, \xi^*)\,dx$$
$$- \left[p(x) \left\{ \Gamma(x, \xi^*) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} - G(x, \xi) \frac{\partial \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x} \right\} \right]_a^b.$$

Wir erörtern zunächst die Randbedingungen I—IV; wenn wir demgemäß die Annahme machen, daß die Funktionen p, q in den Randpunkten sich regulär verhalten und daß überdies p in den Randpunkten von Null verschieden ausfällt, so verhalten sich auch die Integrale der Differentialgleichungen $L(u) = 0$ und $\Lambda(u) = 0$ und somit auch die Funktionen $G(x, \xi)$ und $\Gamma(x, \xi^*)$ in den Randpunkten regulär, und wir erkennen hieraus, daß die eckige Klammer auf der rechten Seite der Formel (4) verschwindet.

Nunmehr erörtern wir den Fall, daß für den Randpunkt $x = a$ die Bedingung V bzw. V* gestellt sei; demgemäß nehmen wir an, daß die Differentialgleichungen $L(u) = 0$ und $\Lambda(u) = 0$ je ein partikuläres Integral besitzen, welches in der Nähe des Randpunktes $x = a$ sich in der Form

$$u(x) = (x - a)^r e(x)$$

darstellt, und daß p in der Nähe des Randpunktes $x = a$ von der Form $(x - a)^s E(x)$ sei, wo s einen Exponenten $\geqq 1 - 2r$ bedeutet. Es wird dann

$$\Gamma(x, \xi^*) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} - G(x, \xi) \frac{\partial \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x} = (x - a)^{2r} e^*(x),$$

wo e^* wiederum für $x = a$ endlich bleibt, und es ist daher gewiß

$$\underset{x=a}{L} \left[p(x) \left\{ \Gamma(x, \xi^*) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} - G(x, \xi) \frac{\partial \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x} \right\} \right] = 0.$$

Nehmen wir schließlich, damit das bestimmte Integral in (4) gewiß einen endlichen Wert erhält, den Exponenten $r > -\frac{1}{2}$ an, so erhalten wir in jedem Falle aus (4) die Formel

$$\Gamma(\xi, \xi^*) - G(\xi^*, \xi) = \lambda\int_a^b G(x, \xi)\Gamma(x, \xi^*)\,dx$$

oder, wenn wir die Buchstaben K, K bzw. an Stelle von G, Γ setzen:

$$\mathsf{K}(x, \xi) - K(x, \xi) = \lambda\int_a^b K(x, \xi^*)\mathsf{K}(\xi, \xi^*)\,d\xi^*.$$

Dabei werde hervorgehoben, daß $K(x, \xi)$ und $\mathsf{K}(x, \xi)$ stetige Funktionen ihrer Argumente sind, außer für die Randbedingung V*; in diesem Falle aber sind wegen unserer Annahme $r > -\frac{1}{2}$ die auftretenden Singularitäten von $K(x, \xi)$ und $\mathsf{K}(x, \xi)$ von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung, und daher erscheinen jene Greenschen Funktionen als Kerne von Integralgleichungen zweiter Art unmittelbar zulässig. Die eben erlangte Formel stimmt genau

mit derjenigen überein, die wir im ersten Abschnitt untersucht haben. Wir sprechen somit den Satz aus:

Satz 12. *Wenn die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ für irgendein Paar der Randbedingungen I—V als Kern der Integralgleichung zweiter Art*

$$(5) \qquad f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi$$

genommen wird, so erhält man die lösende Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ dieser Integralgleichung, indem man die zu den nämlichen Randbedingungen gehörende Greensche Funktion des Differentialausdruckes

$$\varDelta(u) = L(u) + \lambda u$$

bildet.

Da nach Satz 11 die den Randbedingungen genügende Lösung der Differentialgleichung

$$(6) \qquad \varDelta(u) + \varphi(x) = 0$$

unmittelbar aus der Greenschen Funktion des Differentialausdruckes $\varDelta(u)$ gefunden wird, so erweisen sich also die Integration dieser Differentialgleichung (6) bei gegebenen Randbedingungen und die Lösung der Integralgleichung (5) zweiter Art als äquivalente Probleme.

Indem wir die in Kapitel I—VI entwickelte Theorie der Integralgleichungen heranziehen, gelangen wir zu einer Reihe bemerkenswerter Resultate über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung und erkennen zugleich die Bedeutung, die den Eigenwerten und Eigenfunktionen der Integralgleichung (5) für die lineare Differentialgleichung $\varDelta(u) = 0$ zukommt.

Da die lösende Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ sich in der Form eines Bruches $\frac{\varDelta(\lambda; x, \xi)}{\delta(\lambda)}$ darstellt, dessen Nenner nur für die Eigenwerte $\lambda = \lambda^{(h)}$ verschwindet, so folgt unter der Voraussetzung, daß der Differentialausdruck $L(u)$ eine Greensche Funktion für die betreffenden Randbedingungen besitzt, daß es auch stets eine solche für den Differentialausdruck $\varDelta(u)$ gibt, es sei denn λ ein Eigenwert $\lambda^{(m)}$ der Integralgleichung (5); in dem letzteren Falle bezeichne $\psi^{(m)}(x)$ eine normierte zum Eigenwert $\lambda^{(m)}$ gehörige Eigenfunktion des Kerns $K(x, \xi)$; dann ist

$$\psi^{(m)}(x) = \lambda^{(m)} \int_a^b K(x, \xi)\psi^{(m)}(\xi)\, d\xi,$$

und wegen

$$K(x, \xi) = G(x, \xi)$$

folgt aus Satz 11, daß $\psi^{(m)}(x)$ ein überall innerhalb des Intervalles stetig differenzierbares Integral der homogenen Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda^{(m)} u = 0 \tag{7}$$

ist, welches die betreffenden Randbedingungen erfüllt. Umgekehrt, wenn die homogene Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ für den Wert $\lambda = \lambda^{(m)}$ ein Integral besitzt, das die betreffenden Randbedingungen erfüllt, so ist $\lambda^{(m)}$ ein Eigenwert, und das Integral ist eine zugehörige Eigenfunktion für den Kern $K(x, \xi)$; der Differentialausdruck $\Lambda(u)$ aber besitzt für diesen Wert $\lambda = \lambda^{(m)}$ keine Greensche Funktion im ursprünglichen engeren Sinne.

Wir bezeichnen den Wert $\lambda^{(m)}$ auch kurz als einen *Eigenwert der Differentialgleichung* $\Lambda(u) = 0$ und jene Lösungen $\psi^{(m)}(x)$ auch als *Eigenfunktion dieser Differentialgleichung für die betreffenden Randbedingungen.*

Da die Differentialgleichung (7) überhaupt nur zwei voneinander unabhängige Lösungen besitzt, so ist $\lambda^{(m)}$ höchstens ein zweifacher Eigenwert. Ist $\lambda^{(m)}$ ein zweifacher Eigenwert, so müßten sämtliche Integrale der Differentialgleichung (7) die betreffenden Randbedingungen erfüllen, und da dies offenbar nur im Falle der Randbedingung IV statthaben kann, so ist in allen anderen Fällen jeder Eigenwert gewiß nur ein einfacher.

Da der Kern $K(x, \xi)$ ein abgeschlossener ist, so gibt es jedenfalls unendlich viele Eigenwerte der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$. (Vgl. Kapitel IV.) Wegen desselben Umstandes entnehmen wir aus den Sätzen 5 und 6 in Kapitel IV die Tatsachen:

Satz 13. *Wenn $h(x)$ eine stetige Funktion von x bezeichnet, so daß für alle Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(x)$ der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ die Gleichung*

$$\int_a^b h(x)\,\psi^{(m)}(x)\,dx = 0$$

erfüllt ist, so ist $h(x)$ identisch Null.

Satz 14. *Wenn die in Fourierscher Weise gebildete Reihe*

$$c_1\psi^{(1)}(x) + c_2\psi^{(2)}(x) + \cdots,$$

$$c_m = \int_a^b f(x)\,\psi^{(m)}(x)\,dx$$

gleichmäßig konvergiert, so stellt sie die Funktion $f(x)$ dar.

Nach S. 47 ist $K(x, \xi)$ auch ein allgemeiner Kern. Da ferner wegen Satz 11 jede zweimal stetig differenzierbare und den Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ die Darstellung

$$f(x) = \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

gestattet, sobald man

$$\varphi(x) = -L(f(x))$$

wählt, so folgt aus Satz 7 der ersten Mitteilung das folgende wichtige Resultat:

Satz 15. *Jede zweimal stetig differenzierbare und den betreffenden Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ ist auf die Fouriersche Weise in eine Reihe entwickelbar, die nach den Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(x)$ der Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$ fortschreitet; diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.*

Die Sätze 13, 14, 15 schließen den wesentlichen Teil der in neuerer Zeit insbesondere von W. Stekloff[1]) und A. Kneser[2]) gefundenen Resultate über die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen in Sturm-Liouvillesche Reihen ein.

Ist statt des Differentialausdruckes $\Delta(u)$ ein Differentialausdruck von der allgemeineren Gestalt

$$L(u) + \lambda k u \equiv \frac{d\left(p\frac{du}{dx}\right)}{dx} + (q + \lambda k)u$$

vorgelegt, wo k irgendeine innerhalb des Intervalles positive Funktion von x bedeutet, so setze man

$$u = \frac{v}{\sqrt{k}}$$

und multipliziere dann den erhaltenen Ausdruck mit $\frac{1}{\sqrt{k}}$; dann entsteht ein Ausdruck von der früheren Gestalt, nämlich

$$\Delta^*(v) = L^*(v) + \lambda v,$$

wo

$$L^*(v) = \frac{d\left(p^*\frac{dv}{dx}\right)}{dx} + q^* v,$$

$$p^* = \frac{p}{k},$$

$$q^* = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{d}{dx}\left\{p\frac{d\frac{1}{\sqrt{k}}}{dx}\right\} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}}L\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

ist.

---

1) Vgl. z. B. Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) III (1901).

2) Math. Ann. Bd. 58 (1903).

Als erstes Beispiel dienen die Differentialausdrücke

$$L(u) = \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \varDelta(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u,$$

die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion für den Differentialausdruck $L(u)$ im Intervall $x = 0$ bis $x = 1$ ist bereits oben (S. 43) aufgestellt worden; wir nehmen sie als Kern:

$$K(x, \xi) = (1 - \xi)x, \qquad (x \leqq \xi),$$
$$= (1 - x)\xi, \qquad (x \geqq \xi).$$

Die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion $\varDelta(u)$ in demselben Intervall lautet

$$\Gamma(x, \xi) = \frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(1 - \xi)\} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, x)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, \qquad (x \leqq \xi),$$
$$= \frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(1 - x)\} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, \xi)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, \qquad (x \geqq \xi).$$

Nach Satz 12 ist sie zugleich die lösende Funktion für den Kern $K(x, \xi)$ und werde als solche mit $\mathsf{K}(x, \xi)$ bezeichnet. Um die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\varDelta(u) = 0$ zu berechnen, setzen wir

$$\Gamma(x, \xi) = \mathsf{K}(x, \xi) = -\frac{\varDelta(\lambda; x, \xi)}{\delta(\lambda)}.$$

Hier bestimmen sich $\varDelta$ als Funktion von λ, x, ξ und δ als Funktion von λ allein eindeutig durch die Forderungen

$$\int_0^1 \varDelta(\lambda; x, x)\, dx = \frac{d\delta(\lambda)}{d\lambda} \text{ und } \delta(0) = 1,$$

und zwar ergibt sich

$$\varDelta(\lambda; x, \xi) = -\frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(1 - \xi)\} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, x)}{\lambda}, \qquad (x \leqq \xi),$$
$$= -\frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(1 - x)\} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, \xi)}{\lambda}, \qquad (x \geqq \xi),$$
$$\delta(\lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Hieraus folgen die Eigenwerte

$$\lambda^{(1)} = 1^2\pi^2, \quad \lambda^{(2)} = 2^2\pi^2, \quad \lambda^{(3)} = 3^2\pi^2, \quad \ldots$$

und vermöge

$$\lambda^{(m)} \varDelta(\lambda^{(m)}; x, \xi) = \pm\, \varphi^{(m)}(x)\, \varphi^{(m)}(\xi)$$

die bzw. zu jenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen

$$\sin \pi x, \quad \sin 2\pi x, \quad \sin 3\pi x, \quad \ldots.$$

Unser Satz 15 über die Entwicklung nach Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\varDelta(u) = 0$ läuft auf die Aussage hinaus, daß jede zweimal stetig

differenzierbare Funktion von x, die für $x=0$ und $x=1$ verschwindet, sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln läßt, die nach den Sinus der ganzen Vielfachen von πx fortschreitet.

Als weiteres Beispiel wählen wir die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}+\lambda xu=0$$

und fragen nach ihren Eigenwerten und Eigenfunktionen für das Intervall $x=0$ bis $x=1$, wenn an dem Randpunkte $x=0$ die Bedingung V und an dem Randpunkte $x=1$ die Bedingung I erfüllt sein soll. Nach einer früheren Bemerkung (S. 51) haben wir die Substitution $u=\frac{v}{\sqrt{x}}$ anzuwenden; wir gewinnen so die Differentialausdrücke

$$L^*(v)=\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{4x^2}v,\qquad \varLambda^*(v)\equiv L^*(v)+\lambda v.$$

Die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L^*(v)$, die in $x=0$ der Randbedingung V* $(r=\frac{1}{2})$ und in $x=1$ der Randbedingung I genügt, lautet:

$$\begin{aligned}K(x,\xi)&=\sqrt{x\xi}\,l(\xi),\qquad (x\leqq\xi),\\&=\sqrt{x\xi}\,l(x),\qquad (x\geqq\xi),\end{aligned}$$

und die zu den nämlichen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $\varLambda(v)$ ist, wenn in der üblichen Weise

$$J(x)\ \text{und}\ K(x)=J(x)\,l(x)+P(x)$$

die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art bezeichnen:

$$\begin{aligned}\mathsf{K}(x,\xi)&=\sqrt{x\xi}\,\frac{J(x\sqrt{\lambda})\{J(\sqrt{\lambda})K(\xi\sqrt{\lambda})-J(\xi\sqrt{\lambda})K(\sqrt{\lambda})\}}{J(\sqrt{\lambda})},\quad (x\leqq\xi),\\&=\sqrt{x\xi}\,\frac{J(\xi\sqrt{\lambda})\}J(\sqrt{\lambda})K(x\sqrt{\lambda})-J(x\sqrt{\lambda})K(\sqrt{\lambda})\}}{J(\sqrt{\lambda})},\quad (x\geqq\xi).\end{aligned}$$

Diese Funktion $\mathsf{K}(x,\xi)$ ist mithin nach Satz 12 die lösende Funktion des Kerns K, und wir finden hieraus

$$\delta(\lambda)=J(\sqrt{\lambda});$$

mithin sind die Nullstellen $\lambda^{(m)}$ von $J(\sqrt{\lambda})$ die gesuchten Eigenwerte und, wenn man diese für λ in den Zähler des Ausdruckes für $\mathsf{K}(x,\xi)$ einführt, so ergeben sich die zugehörigen Eigenfunktionen

$$\varphi^{(m)}(x)=\sqrt{x}\,J(x\sqrt{\lambda^{(m)}}).$$

Unser Satz über die Entwicklung nach Eigenfunktionen des Differentialausdruckes $\varLambda(u)$ läuft, wenn wir nachträglich die zu entwickelnde Funktion durch $\sqrt{x}$ dividieren und den Faktor $\sqrt{x}$ ebenfalls in allen Eigenfunktionen

fortlassen, auf die Aussage hinaus, daß im Intervalle 0 bis 1 jede zweimal stetig differenzierbare Funktion von x, die für $x = 1$ verschwindet, sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln läßt, die nach den Besselschen Funktionen $J(x\sqrt{\lambda^{(m)}})$ fortschreitet.[1])

Weitere interessante Beispiele für unsere Theorie erhalten wir, wenn wir die Differentialgleichungen der Zylinder- und Kugelfunktionen höherer Art heranziehen; so führt die früher (S. 44) aufgestellte Greensche Funktion:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha}, \quad (x \leqq \xi),$$
$$= \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\,\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}, \quad (x \geqq \xi)$$

zu der neuen Definition der Kugelfunktion $P_\alpha^{(m)}$

$$P_\alpha^{(m)}(x) = \lambda^{(m)}\int_{-1}^{+1} G(x, \xi)\, P_\alpha^{(m)}(\xi)\, d\xi,$$

und zu der Tatsache der Entwickelbarkeit einer jeden zweimal stetig differenzierbaren Funktion in eine Reihe, die nach den Kugelfunktionen $P_\alpha^{(m)}$ fortschreitet.

Tritt der oben (S. 44) behandelte besondere Fall ein, daß zum Differentialausdruck L bei den betreffenden Randbedingungen eine Greensche Funktion im engeren Sinne nicht existiert, so gelten unsere Entwicklungen für die Greensche Funktion in dem dort erklärten erweiterten Sinne. Bezeichnet nämlich wie oben $\psi^{(0)}(x)$ die alsdann vorhandene, den Randbedingungen genügende, überall stetig differenzierbare Lösung der Gleichung $L(u) = 0$, so ergibt sich durch Anwendung der Greenschen Formel (1) an Stelle des Satzes 11 leicht die folgende Tatsache:

Satz 16. *Wenn f eine zweimal stetig differenzierbare, den Randbedingungen und der Bedingung*

$$\int_a^b f(x)\,\psi^{(0)}(x)\,dx = 0$$

genügende Funktion bedeutet, so ist die Integralgleichung erster Art

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

lösbar und ihre Lösung gewinnt man durch die Formel

$$\varphi(x) = -L(f(x)).$$

1) Neuerdings hat A. Kneser die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion nach Besselschen Funktionen nach einer Methode bewiesen, die derjenigen analog ist, die er in der oben genannten Abhandlung auf die Sturm-Liouvilleschen Reihen angewandt hat. Archiv der Math. und Phys. 1903.

Diesem Satze 16 entsprechend müssen wir auch in den Voraussetzungen des Satzes 15 über die Entwickelbarkeit nach Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Lambda(u)=0$ für die zu entwickelnde Funktion $f(x)$ die Bedingung

$$\int_a^b f(x)\psi^{(0)}(x)\,dx=0$$

hinzufügen; lassen wir jedoch im vorliegenden Falle $\lambda=0$ als Eigenwert und die Funktion $\psi^{(0)}(x)$ als zugehörige Eigenfunktion gelten, so bleibt unser früherer Satz 15 auch bei unverändertem Wortlaut gültig.

Als einfachstes Beispiel für das zuletzt behandelte Vorkommnis dienen die Differentialausdrücke

$$L(u)=\frac{d^2u}{dx^2},\qquad \Lambda(u)=\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u.$$

Wenn wir die Randbedingungen IV ($h=1$) für das Intervall -1 bis $+1$ wählen, nämlich

$$f(+1)=f(-1),\qquad f'(+1)=f'(-1),$$

dann wird $\psi^{(0)}(x)=1$, und der Ausdruck der Greenschen Funktion im weiteren Sinne ist bereits oben (S. 45) angegeben worden. Wir erhalten dieselben Eigenwerte wie im ersten Beispiel (S. 52); jedoch ist jeder dieser Eigenwerte zweifach: allgemein gehören zu $\lambda^{(m)}=m^2\pi^2$ die zwei Eigenfunktionen $\sin m\pi x$, $\cos m\pi x$. Zu diesen kommt, den letzten Ausführungen entsprechend, $\lambda=0$ als einfacher Eigenwert der Differentialgleichung $\Lambda(u)=0$ mit der zugehörigen Eigenfunktion $\psi^{(0)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ hinzu.

Als zweites Beispiel für das in Rede stehende besondere Vorkommnis mögen die Differentialausdrücke

$$L(u)=\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{du}{dx}\right\},\qquad \Lambda(u)=\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{du}{dx}\right\}+\lambda u$$

mit den Randbedingungen V für das Intervall -1 bis $+1$ dienen. Wir haben bereits oben (S. 45) für $L(u)$ die Greensche Funktion $G(x,\xi)$ im erweiterten Sinne aufgestellt. Da die Legendreschen Polynome $P^{(m)}$ ($m=0,1,2,3,\ldots$) die Differentialgleichungen

$$L(u)+m(m+1)u=0$$

erfüllen und an den Randpunkten endlich bleiben, so sind sie die zu den Eigenwerten

$$\lambda^{(m)}=m(m+1)$$

gehörigen Eigenfunktionen; die so entstehende neue Definition für die Kugelfunktion $P^{(m)}$:

$$P^{(m)}(x)=\lambda^{(m)}\int_{-1}^{+1}G(x,\xi)P^{(m)}(\xi)\,d\xi,\quad (m=0,1,2,\ldots)$$

oder einfacher:

$$P^{(m)}(x) = \lambda^{(m)} \int_{-1}^{+1} G^*(x, \xi) P^{(m)}(\xi)\, d\xi, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

wo

$$\begin{aligned} G^*(x, \xi) &= -\tfrac{1}{2} l\{(1-x)(1+\xi)\}, \quad (x \leqq \xi), \\ &= -\tfrac{1}{2} l\{(1+x)(1-\xi)\}, \quad (x \geqq \xi) \end{aligned}$$

ist, kann als Grundlage für die Theorie der Kugelfunktionen dienen. Unser soeben verallgemeinerter Satz 15 liefert die Entwicklung einer beliebigen zweimal stetig differentiierbaren und an den Randpunkten $+1$, -1 endlich bleibenden Funktion nach Legendreschen Polynomen.

Wir haben im Vorstehenden den engen Zusammenhang zwischen der Theorie des Differentialausdruckes

$$\Lambda(u) \equiv L(u) + \lambda u$$

und der Theorie der Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern $K(x, \xi)$ kennen gelernt. Dieser enge Zusammenhang zeigte sich am klarsten in der Übereinstimmung der Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ mit denjenigen jener Integralgleichung.

Nun erscheint bekanntlich die Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$, wenn man nach den Regeln der Variationsrechnung das folgende (Dirichletsche) Variationsproblem löst: man soll eine den Randbedingungen I genügende Funktion u von x derart bestimmen, daß das Integral

(8) $$D(u) = \int_a^b \left\{ p \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - q u^2 \right\} dx$$

zu einem Minimum wird, während die Nebenbedingung

(9) $$\int_a^b u^2 dx = 1$$

erfüllt ist. Andererseits haben wir in Kapitel V allgemein erkannt, wie durch meine Theorie der Integralgleichungen zweiter Art das folgende (Gaußsche) Variationsproblem gelöst wird: es ist ein definiter Kern gegeben; man soll diejenige Funktion $\omega(x)$ finden, für welche das Integral

(10) $$J(\omega) = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi)\, \omega(x)\, \omega(\xi)\, dx\, d\xi$$

seinen größten Wert besitzt, während die Nebenbedingung

(11) $$\int_a^b (\omega(x))^2 dx = 1$$

erfüllt ist.

Wir wollen den engen Zusammenhang zwischen diesen beiden Variationsproblemen kurz darlegen. Zu dem Zwecke bestimmen wir zunächst eine Konstante c derart, daß für alle Punkte x, y innerhalb J

$$c - q \geqq 0$$

ausfällt. Denken wir uns dann in (8) an Stelle von $-q$ die Funktion $c - q$ eingesetzt, so unterscheidet sich das Variationsproblem, das so modifizierte Integral bei der Nebenbedingung (9) zum Minimum zu machen, in nichts von dem ursprünglichen Variationsproblem; d. h. wir dürfen in unserem ersten Variationsproblem von vornherein $-q \geqq 0$ annehmen, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen.

Nunmehr setzen wir zwischen irgend zwei Funktionen u und ω, mit denen wir die Integrale (8) bzw. (10) bilden, die Beziehung

$$L(u(x)) = -\omega(x) \tag{12}$$

fest. Bedenken wir, daß

$$G(x, \xi) = K(x, \xi)$$

die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ ist, so folgt nach Satz 11 aus (12)

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi)\,\omega(\xi)\,d\xi, \tag{13}$$

und hieraus entnehmen wir wegen (10), (12) und (13), da

$$D(u) = -\int_a^b u L(u)\,dx$$

ist, die Gleichung

$$D(u) = J(\omega).$$

Wegen $-q \geqq 0$ ist $D(u)$ nur positiver Werte fähig; mithin ist $K(x, \xi)$ ein definiter Kern und seine Eigenwerte $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \ldots$ sind sämtlich positiv (vgl. Abschnitt 1, Kap. V). Setzen wir nun

$$c_h = \int_a^b \omega(x)\,\psi^{(h)}(x)\,dx,$$

wo $\psi^{(1)}(x), \psi^{(2)}(x), \psi^{(3)}(x), \ldots$ die normierten Eigenfunktionen des Kerns $K(x, \xi)$ bezeichnen, und entwickeln wir $u(x)$ in eine nach diesen Eigenfunktionen fortschreitende Reihe, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\int_a^b K(x, \xi)\,\psi^{(m)}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\lambda^{(m)}}\,\psi^{(m)}(x)$$

die Reihe

$$u(x) = \frac{c_1}{\lambda^{(1)}}\,\psi^{(1)}(x) + \frac{c_2}{\lambda^{(2)}}\,\psi^{(2)}(x) + \cdots$$

und folglich

$$\int_a^b (u(x))^2 dx = \frac{c_1^2}{(\lambda^{(1)})^2} + \frac{c_2^2}{(\lambda^{(2)})^2} + \cdots.$$

Andererseits ist wegen (10)

$$J(\omega) = \frac{c_1^2}{\lambda^{(1)}} + \frac{c_2^2}{\lambda^{(2)}} + \cdots.$$

Nunmehr wird die Reihe rechter Hand, wenn wir die Nebenbedingung (9)

$$\frac{c_1^2}{(\lambda^{(1)})^2} + \frac{c_2^2}{(\lambda^{(2)})^2} + \cdots = 1$$

stellen, ihren Minimalwert für

$$c_1 = \lambda^{(1)}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad \ldots$$

und, wenn wir die Nebenbedingung (11)

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots = 1$$

stellen, ihren Maximalwert für

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad \ldots$$

erhalten, wobei $\lambda^{(1)}$ den kleinsten Eigenwert bedeutet. Demnach werden

$$u(x) = \psi^{(1)}(x) \text{ und } \omega(x) = \psi^{(1)}(x)$$

die gesuchten Lösungen der beiden Variationsprobleme.

Wir sehen also, daß vermöge der Transformation (12) oder (13) das Integral (8) in das Integral (10) übergeht, dagegen nicht zugleich die Nebenbedingung (9) in die Nebenbedingung (11). Wollen wir letztere Nebenbedingung erhalten, so müssen wir vielmehr in dem ersten Variationsproblem an Stelle von (9) die Nebenbedingung

$$\int_a^b (L(u))^2 dx = 1,$$

wählen, wobei u an den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ verschwinden soll; in der Tat überzeugt man sich leicht, daß die daraus nach den Regeln der Variationsrechnung entspringende Differentialgleichung wiederum keine andere als $\Delta(\omega) = 0$ wird, wo $\omega = -L(u)$ ist. Das letztgenannte Variationsproblem erscheint in diesem Sinne mit dem erstgenannten Variationsprobleme äquivalent.

Achtes Kapitel.

Sich selbst adjungierte partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typus.

Die in Kapitel VII entwickelte Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung läßt sich vollkommen auf die sich selbst

adjungierten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typus übertragen, da ja, wie wir in der Einleitung zu Kapitel I bemerkt haben, unsere Methoden und Resultate über die Integralgleichungen auch gültig sind, wenn in denselben an Stelle der einfachen Integrale mehrfache Integrale stehen und dementsprechend der Kern K eine symmetrische Funktion zweier Reihen von Variabeln bedeutet.

In der xy-Ebene sei eine geschlossene Kurve C durch die Gleichungen

$$x = a(s), \quad y = b(s)$$

gegeben, wo $a(s)$, $b(s)$ stetige Funktionen der Bogenlänge s sind, deren Ableitungen — von einer endlichen Anzahl von Werten s abgesehen — ebenfalls stetig ausfallen. Das von dieser Kurve C umschlossene endliche Gebiet der xy-Ebene werde mit J bezeichnet, die Kurve C heiße die Randkurve des Gebietes J. Der allgemeinste homogene lineare, sich selbst adjungierte, partielle Differentialausdruck zweiter Ordnung von elliptischem Typus kann stets auf die Form

$$L(u) \equiv \frac{\partial\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} + qu$$

$$\equiv p\Delta u + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + qu$$

gebracht werden. Wir machen über die in $L(u)$ auftretenden Funktionen folgende Annahmen. Es sei u eine Funktion der Veränderlichen x, y, deren zwei erste Ableitungen innerhalb des Gebietes J, sowie an der Randkurve C stetig sind; ferner sei p irgendeine innerhalb jenes Gebietes einmal nach x und y stetig differenzierbare Funktion von x, y, die überdies innerhalb J positiv ausfällt; endlich sei q irgendeine innerhalb J stetige Funktion von x, y.

Bedeutet v wie u eine zweimal stetig differenzierbare Funktion von x, y, so gilt die sogenannte *Greensche Formel*

$$\int_{(J)} \{vL(u) - uL(v)\}\,dJ = \int_{(C)} p\left\{u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right\} ds; \tag{14}$$

darin ist das Integral links über das Gebiet J, das Integral rechts über die Randkurve C zu erstrecken, und $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ bedeuten die Ableitungen nach der ins Innere gerichteten Normale der Randkurve C; dJ bedeutet das Flächenelement von J, und ds das Längenelement von C.

Es seien γ_1, γ_2 solche Funktionen der Variabeln x, y und der Parameter ξ, η, die innerhalb J und auf der Randkurve C in bezug auf x, y zweimal stetig differenzierbar und von der Art sind, daß der Ausdruck

$$\gamma(xy, \xi\eta) = -\gamma_1 l\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)+\gamma_2$$
$$= \gamma_1 l\left(\frac{1}{\varrho}\right)+\gamma_2, \quad \left(\varrho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)$$

in bezug auf das Variabelnpaar x, y — wenn nicht gerade $x=\xi$, $y=\eta$ wird — der Differentialgleichung

$$L(u)=0$$

genügt; außerdem sei identisch für alle ξ, η

$$\gamma_1(\xi\eta, \xi\eta)=1.$$

Ein solcher Ausdruck $\gamma(xy, \xi\eta)$ werde eine *Grundlösung der Differentialgleichung* $L(u)=0$ *für das Gebiet* J genannt.[1])

So besitzt $\Delta(u)=0$ die Grundlösung $-l(\varrho)$, und für die Differentialgleichung $\Delta(u)+u=0$ ist $-K(\varrho)$ eine Grundlösung, wenn K die bereits oben (S. 53) benutzte Besselsche Funktion zweiter Art bedeutet.

Setzen wir in der Greenschen Formel (14) für u irgendeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u(xy)) = -2\pi\varphi(xy)$$

und an Stelle von v eine Grundlösung $\gamma(xy, \xi\eta)$ ein, wobei ξ, η einen festen Punkt innerhalb J darstellt, so ergibt sich die Formel

$$(15) \qquad u(\xi\eta) = \frac{1}{p(\xi\eta)}\int\limits_{(J)}\gamma(xy, \xi\eta)\,\varphi(xy)\,dJ$$
$$+\frac{1}{2\pi p(\xi\eta)}\int\limits_{(C)}\left[p(xy)\left\{u(xy)\frac{\partial\gamma(xy, \xi\eta)}{\partial n}-\frac{\partial u(xy)}{\partial n}\gamma(xy, \xi\eta)\right\}\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} ds.$$

Zu einer vorgelegten Differentialgleichung $L(u)=0$ werden offenbar aus einer Grundlösung unendlich viele erhalten, wenn man ein beliebiges Integral von $L(u)=0$ hinzufügt, das an jeder Stelle innerhalb J stetig ist. Für unsere weiteren Entwicklungen sind diejenigen Grundlösungen von besonderer Bedeutung, die an der Randkurve C gewisse homogene Randbedingungen erfüllen, und zwar kommen dabei insbesondere diejenigen Randbedingungen in Betracht, die den Randbedingungen I—V* (S. 41) in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen entsprechen. Wir heben hier nur folgende fünf Arten von Randbedingungen für eine Funktion $f(xy)$ hervor:

I. $f(xy)=0$ für alle Punkte x, y der Randkurve C.

II. $\frac{\partial f}{\partial n}=0$ „ „ „ „ „ „ „

1) Dieser Begriff der Grundlösung ist zuerst von A. Sommerfeld eingeführt worden, vgl. Mathematische Enzyklopädie Bd. II, S. 515. Hinsichtlich ihrer Existenz vgl. E. Holmgren, Math. Ann. Bd. 58 S. 404.

III. $\frac{\partial f}{\partial n} + hf = 0$ für alle Punkte x, y der Randkurve C.

IV. $[f(xy)]_s = [f(xy)]_{s+\frac{l}{2}}, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_s = -\left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_{s+\frac{l}{2}}$ für alle s;

dabei bedeutet der Parameter s die Bogenlänge der Randkurve C von einem festen Punkte $s = 0$ an bis zu einem beliebigen Punkte derselben gerechnet, während l die Gesamtlänge der Randkurve C bezeichnet.

V. Ist die Randkurve C singuläre Linie der Differentialgleichung $L(u) = 0$ von gewisser Art (Nullinie von p), so ist als Randbedingung die Forderung zulässig: es soll $f(xy)$ bei der Annäherung an die Randkurve endlich bleiben.

V*. Wird die bisherige Betrachtungsweise in der Weise verallgemeinert, daß an Stelle der xy-Ebene eine beliebige geschlossene singularitätenfreie Fläche tritt (vgl. diesen Abschnitt S. 64), so kann die Randbedingung für $f(xy)$ durch die Forderung ersetzt werden, daß die Funktion $f(xy)$ sich überall auf der Fläche regulär verhalten soll.

Diese Randbedingungen können noch in verschiedenster Weise miteinander kombiniert werden derart, daß auf einem Teile der Randkurve C die eine, auf einem anderen Teile eine andere Randbedingung erfüllt ist.

Eine Grundlösung $g(xy, \xi\eta)$ für das Gebiet J, die als Funktion von x, y an der Randkurve C eine homogene Randbedingung der genannten Arten erfüllt, heißt *die zu dieser Randbedingung gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung* $L(u) = 0$; ferner heiße der Quotient

$$G(xy, \xi\eta) = \frac{g(xy, \xi\eta)}{p(\xi\eta)},$$

die zu jener Randbedingung gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$.

Wenn für einen Differentialausdruck $L(u)$ keine Greensche Funktion im eben definierten Sinne existiert, so verfahren wir genau analog, wie in dem entsprechenden Falle in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (S. 44): ist dann nämlich $\psi^{(0)}(xy)$ eine von Null verschiedene überall stetige Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die die betreffende Randbedingung, sowie die Relation

$$\int\limits_{(J)} (\psi^{(0)}(xy))^2 dJ = 1$$

erfüllt, so konstruieren wir eine Lösung $g(xy, \xi\eta)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u) = 2\pi p(\xi\eta)\psi^{(0)}(xy)\psi^{(0)}(\xi\eta),$$

die an der Stelle $x = \xi$, $y = \eta$ in derselben Weise wie eine Grundlösung

logarithmisch unendlich wird, auf C die betreffende Randbedingung und überdies die Gleichung

$$\int_{(J)} g(xy, \xi\eta)\psi^{(0)}(xy)\,dJ = 0$$

erfüllt. Die Funktion

$$G(xy, \xi\eta) = \frac{g(xy, \xi\eta)}{p(\xi\eta)}$$

genügt der Differentialgleichung

$$L(u) = 2\pi\psi^{(0)}(xy)\psi^{(0)}(\xi\eta).$$

Die Funktionen $g(xy, \xi\eta)$, $G(xy, \xi\eta)$ werden als Greensche Funktionen im erweiterten Sinne bezeichnet. Man sieht leicht ein, wie die Definition der Greenschen Funktion weiter zu verallgemeinern ist, wenn auch im eben definierten Sinne eine Greensche Funktion nicht existiert.[1])

Wie oben (S. 45) gewinnen wir leicht das Symmetriegesetz der Greenschen Funktion eines Differentialausdruckes

$$G(\xi\eta, \xi^*\eta^*) = G(\xi^*\eta^*, \xi\eta)$$

und sodann unter Heranziehung der Formel (15) die folgende Tatsache:

Satz 17. *Wenn die Greensche Funktion eines Differentialausdruckes $L(u)$ für eine gewisse Randbedingung als Kern einer Integralgleichung erster Art*

$$f(xy) = \int_{(J)} G(xy, \xi\eta)\varphi(\xi\eta)\,dJ$$

genommen wird, wo $f(xy)$ eine gegebene zweimal stetig differenzierbare, jener Randbedingung genügende Funktion ist, so besitzt diese Integralgleichung eine und nur eine Lösung $\varphi(xy)$, und man erhält diese Lösung durch die Formel

$$\varphi(xy) = -\frac{1}{2\pi} L(f(xy));$$

umgekehrt, wenn $\varphi(xy)$ irgendeine stetig differenzierbare Funktion ist und eine Lösung der Differentialgleichung

$$L(f(xy)) + 2\pi\varphi(xy) = 0$$

gefunden werden soll, die der gewählten Randbedingung genügt, so ist diese Lösung dadurch eindeutig bestimmt, und man erhält sie durch die Formel

$$f(xy) = \int_{(J)} G(xy, \xi\eta)\varphi(\xi\eta)\,dJ.$$

Aus diesem Satze entnehmen wir leicht wie oben (S. 47), daß die Greensche Funktion $G(xy, \xi\eta)$ einen Kern darstellt, der nach der im

1) Über den Existenzbeweis der erweiterten Greenschen Funktion vergleiche Kap. IX, und Kap. XVIII.

ersten Abschnitt eingeführten Ausdrucksweise sowohl abgeschlossen als auch allgemein ist.

Nunmehr gehen wir zur Behandlung des Differentialausdruckes

$$\Delta(u) \equiv L(u) + 2\pi\lambda u$$

über und erhalten genau wie oben (S. 46—51) durch die analogen Schlüsse der Reihe nach folgende Sätze:

Satz 18. *Wenn die Greensche Funktion eines Differentialausdruckes $L(u)$ für eine gewisse Randbedingung als Kern der Integralgleichung zweiter Art*

$$(16) \qquad f(xy) = \varphi(xy) - \lambda \int_{(J)} K(xy, \xi\eta)\varphi(\xi\eta)\, dJ$$

genommen wird, so erhält man die lösende Funktion $\mathsf{K}(xy, \xi\eta)$ dieser Integralgleichung, indem man die zu der nämlichen Randbedingung gehörende Greensche Funktion des Differentialausdruckes

$$\Delta(u) \equiv L(u) + 2\pi\lambda u$$

bildet.

Wir bezeichnen die Eigenwerte $\lambda^{(m)}$ und Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(xy)$ der Integralgleichung zweiter Art (16) auch als *die Eigenwerte* bzw. *Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$ für die betreffende Randbedingung.*[1])

Satz 19. *Wenn $h(xy)$ eine stetige Funktion von x, y bezeichnet, so daß für alle Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(xy)$ der Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$ die Gleichung*

$$\int_{(J)} h(xy)\psi^{(m)}(xy)\, dJ = 0$$

erfüllt ist, so ist $h(xy)$ identisch 0.

Satz 20. *Wenn die in Fourierscher Weise gebildete Reihe*

$$c_1\psi^{(1)}(xy) + c_2\psi^{(2)}(xy) + \cdots,$$
$$c_m = \int_{(J)} f(xy)\psi^{(m)}(xy)\, dJ$$

gleichmäßig konvergiert, so stellt sie die Funktion $f(xy)$ dar.

---

1) Die Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ hat H. Poincaré untersucht und als „fonctions harmoniques" bezeichnet. Seit dem Erscheinen seiner grundlegenden Abhandlung „Sur les équations de la physique mathématique, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (1894) haben sich zahlreiche Forscher mit dem Beweise für die Existenz jener fonctions harmoniques und mit dem Problem der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach denselben erfolgreich beschäftigt: u. a. Le Roy (Annales de l'École normale supérieure 1898), W. Stekloff (Annales de la faculté de Toulouse 1900), S. Zaremba (Annales de l'École normale supérieure 1899, Journ. de Math. 1900), A. Korn (Abhandlungen zur Potentialtheorie 4. Berlin 1902). Wie es scheint, umschließen die im folgenden gewonnenen allgemeinen Sätze die wesentlichen Resultate der genannten Forscher.

Satz 21. *Jede zweimal stetig differenzierbare und den betreffenden Randbedingungen genügende Funktion $f(xy)$ ist auf die Fouriersche Weise in eine Reihe entwickelbar, die nach den Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(xy)$ der Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$ fortschreitet; diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.*

Ist statt des Differentialausdruckes $\Delta(u)$ ein Differentialausdruck von der allgemeineren Gestalt

$$L(u) + \lambda k u \equiv \frac{\partial\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} + (q + \lambda k)u$$

vorgelegt, wo k irgendeine innerhalb des Gebietes J positive Funktion von x, y bedeutet, so setze man

$$u = \frac{v}{\sqrt{k}}$$

und multipliziere dann den erhaltenen Ausdruck mit $\frac{1}{\sqrt{k}}$; dann entsteht ein Ausdruck von der früheren Gestalt, nämlich

$$\Delta^*(v) = L^*(v) + \lambda v,$$

wo

$$L^*(v) = \frac{\partial\left(p^*\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p^*\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y} + q^* v,$$

$$p^* = \frac{p}{k},$$

$$q^* = \frac{1}{\sqrt{k}}\,L\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

ist.

Die Betrachtungen dieses Kapitels VIII lassen sich leicht auf den Fall übertragen, daß das Integrationsgebiet J auf einer beliebigen Fläche im Raume gelegen ist: an Stelle des bisherigen Differentialausdruckes für das ebene Gebiet J tritt dann eine gewisse Verallgemeinerung des Beltramischen Differentialparameters, nämlich der Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{g\,\frac{\partial u}{\partial x} - f\,\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{eg - f^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\,\frac{e\,\frac{\partial u}{\partial y} - f\,\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{eg - f^2}}\right)\right\} + qu;$$

darin bedeuten x, y die krummlinigen Koordinaten der Fläche und e, f, g in bekannter Weise die Koeffizienten des Quadrates des Linienelementes

$$ds^2 = e dx^2 + 2f dx dy + g dy^2$$

der Fläche; p bedeutet eine innerhalb J positive stetig differentiierbare Funktion und q irgendeine stetige Funktion auf der Fläche. Die Greensche Formel (14) gilt für irgendein Gebiet J auf der Fläche mit der Randkurve C unverändert in der bisherigen Gestalt.[1])

1) Vgl. G. Darboux, Theorie générale des surfaces liv. VII chap. I.

Ist insbesondere die Fläche geschlossen und singularitätenfrei, so kann die Randbedingung für eine Funktion $f(xy)$ durch die Forderung ersetzt werden, daß die Funktion $f(xy)$ sich überall auf der Fläche regulär verhalten soll (Randbedingung V* S. 42). Auch in diesem Falle lehrt unsere Theorie die Existenz der Eigenfunktionen und die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion auf der Fläche nach jenen Eigenfunktionen der Fläche.[1])

Als Beispiel diene die Kugel K mit dem Radius 1. Wählen wir für x, y die Polarkoordinaten ϑ, φ, so erhält wegen

$$e = 1,$$
$$f = 0,$$
$$g = \sin^2\vartheta$$

unser Differentialausdruck für $p = \frac{1}{2\pi}$, $q = 0$ die Gestalt:

$$L(u) \equiv \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Die Greensche Funktion $g(\vartheta\varphi, \vartheta^*\varphi^*)$ im erweiterten Sinne hat wegen $\psi^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ der Gleichung

$$L(g) = \frac{1}{4\pi}$$

zu genügen. Bedeutet ϱ die kleinste sphärische Entfernung der Punkte ϑ, φ und ϑ^*, φ^* auf der Kugel, so ergibt sich

$$g(\vartheta\varphi, \vartheta^*\varphi^*) = -l\left(2\sin\frac{\varrho}{2}\right);$$

dieselbe erfüllt in der Tat das Symmetriegesetz.[2])

Die Eigenwerte zum Kern $G = 2\pi g$ d. h. die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$\Lambda(u) \equiv L(u) + \lambda u = 0$$

sind

$$\lambda^{(n)} = \frac{n(n+1)}{2\pi}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und zwar wird allgemein $\lambda^{(n)}$ ein $2n+1$ facher Eigenwert, indem zu $\lambda^{(n)}$ als Eigenfunktionen die $2n+1$ Kugelflächenfunktionen $P^{(n)}$ vom $n$ten Grade gehören; die letzteren erfüllen mithin die Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda^{(n)}u = 0$$

1) Vgl. Kap. XVIII.

2) Diese Greensche Funktion für die Kugelfläche haben bereits E. Zermelo, Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche, Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 47 (1902) und J. Hadamard, Propagation des ondes, Paris 1903, berechnet. Bezüglich der Existenz eines Potentials auf einer geschlossenen Fläche vgl. E. Picard C. R. (Paris, 1900 und 1903.)

und die Integralgleichung

$$\lambda^{(n)} \int_{(K)} P^{(n)}(\vartheta^* \varphi^*)\, G(\vartheta\varphi, \vartheta^*\varphi^*)\, dK = P^{(n)}(\vartheta\varphi)$$

oder

$$-n(n+1) \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P^{(n)}(\vartheta^*\varphi^*)\, l\left(2\sin\frac{\varrho}{2}\right) \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = P^{(n)}(\vartheta\varphi).$$

Unser Satz 21 lehrt, daß jede zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Kugel nach den Kugelflächenfunktionen entwickelbar ist.

Schließlich sei noch erwähnt, daß die Bedeutung der Eigenfunktionen als Lösungen gewisser Variationsprobleme, sowie alle hiermit in Zusammenhang stehenden Tatsachen, wie sie für den Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen am Schluß des Kapitels VII angedeutet sind, entsprechend auch für den gegenwärtigen Fall der partiellen Differentialgleichungen zutreffen.

Neuntes Kapitel.

Existenz der Greenschen Funktion. Auftreten eines Parameters in der Randbedingung bei partiellen Differentialgleichungen.

Auch die Untersuchungen dieses Kapitels betreffen die Integration partieller Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln x, y; doch soll nicht wie in Kapitel VIII die Differentialgleichung den Parameter λ enthalten, sondern wir nehmen vielmehr an, daß der Parameter λ in der Randbedingung auftritt. Es wird sich zeigen, daß auf gewisse dann entstehende Fragen ebenfalls die im ersten Abschnitt entwickelte Theorie der Integralgleichungen erfolgreiche Anwendung findet.

Wenn die zu einer Randbedingung gehörige Greensche Funktion G bekannt ist, so wird stets eine gewisse zugehörige Randwertaufgabe lösbar. Setzen wir beispielsweise in der Formel (15) (S. 60)

$$\gamma(xy, \xi\eta) = p(\xi\eta)\, G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta),$$

wo $G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta)$ die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ bezeichnet, und wählen dann für u irgendeine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, so entsteht die Gleichung

$$u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \left[p(xy)u(xy) \frac{\partial G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta)}{\partial n} \right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} ds;$$

diese Formel löst die Aufgabe, das stetige Integral u jener Differentialgleichung $L(u) = 0$ im Innern des Gebietes J zu finden, wenn seine Werte auf der Randkurve C gegeben sind.

In entsprechender Weise bezeichnen wir mit $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ die zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ und setzen in Formel (15) (S. 60)

$$\gamma(xy) = p(\xi\eta)\, G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta);$$

wählen wir dann für u wiederum eine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, so wird

$$(17) \qquad u(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}\left[p(xy)\,\frac{\partial u(xy)}{\partial n}\,G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} ds;$$

diese Formel löst die Aufgabe, das Integral u jener Differentialgleichung $L(u) = 0$ im Innern des Gebietes J zu finden, wenn die Werte seiner normalen Ableitung auf der Randkurve C gegeben sind.

Umgekehrt sieht man sofort wie in der Potentialtheorie ein, daß, wenn die letztgenannten Randwertaufgaben als lösbar erkannt sind, daraus mit Hilfe einer Grundlösung stets die Existenz der Greenschen Funktionen G^{I} bzw. G^{II} folgt.

Ehe wir nun der Frage nach der Existenz der Greenschen Funktionen näher treten, schicken wir einige Betrachtungen voraus, die sich auf den Zusammenhang zwischen gewissen Kernen von Integralgleichungen beziehen. Wie in Kapitel III werde, wenn $K(s, t)$ irgendein Kern ist, die Funktion

$$KK(s, t) = \int_a^b K(s, r)\, K(t, r)\, dr$$

als der *aus $K(s, t)$ zweifach zusammengesetzte Kern* bezeichnet. Eine Reihe von Eigenschaften lassen sich von dem Kern $K(s, t)$ aussagen, wenn die entsprechenden Eigenschaften von $KK(s, t)$ bekannt sind; hier mögen nur folgende Sätze erwähnt werden:

Satz 20. *Wenn der aus $K(s, t)$ zweifach zusammengesetzte Kern abgeschlossen oder allgemein ist, so ist stets auch der Kern $K(s, t)$ abgeschlossen bzw. allgemein.*

Satz 21. *Wenn $K(s, t)$ ein abgeschlossener Kern ist und die Integralgleichung erster Art mit dem Kern $KK(s, t)$ lösbar ist, so ist es auch die Integralgleichung erster Art mit dem Kern $K(s, t)$.*

In der Tat, aus

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

folgt durch Multiplikation mit $K(r, s)$ und Integration nach s die Gleichung

$$\int_a^b K(r, s)\, f(s)\, ds = \int_a^b KK(r, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Wenn $f(s)$ eine gegebene Funktion ist, so wird die linke Seite dieser Gleichung ebenfalls eine bestimmte Funktion, und aus dieser folgt die Funktion $\varphi(t)$ durch Lösung der Integralgleichung erster Art mit dem Kern $KK(s, t)$.

Satz 22. *Wenn $KK(s, t)$ ein allgemeiner Kern ist, so läßt er sich stets in eine Reihe entwickeln:*

$$KK(s, t) = \frac{\psi^{(1)}(s)\,\psi^{(1)}(t)}{\lambda^{(1)}} + \frac{\psi^{(2)}(s)\,\psi^{(2)}(t)}{\lambda^{(2)}} + \cdots,$$

wobei $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ und $\psi^{(1)}(s), \psi^{(2)}(s), \ldots$ die zu $KK(s, t)$ gehörigen Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte bedeuten.

Zum Beweise wende man Satz 7 des ersten Abschnittes auf den Kern $K(s, t)$ an und setze in der so entstehenden Entwicklung an Stelle der Funktion $g(t)$ den Kern $K(t, r)$ ein.

Da in den Entwicklungen des Kapitels II und in Kap. VI die Symmetrie des Kernes $K(s, t)$ nirgends vorausgesetzt wurde, so existiert für eine Integralgleichung zweiter Art, auch wenn ihr Kern $K(s, t)$ unsymmetrisch ist, eine lösende Funktion, d. h. eine Funktion $\mathsf{K}(s, t)$ von der Art, daß

$$K(s, t) = \mathsf{K}(s, t) - \lambda \int_a^b K(s, r)\,\mathsf{K}(r, t)\,dr$$

wird, allemal dann, wenn $K(s, t)$ nur Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung besitzt. Ebenso folgt, daß eine Integralgleichung zweiter Art, deren Kern $K(xy, \xi\eta)$ eine Funktion zweier Variabelnpaare ist, gewiß eine lösende Funktion besitzt, wenn der Kern $K(xy, \xi\eta)$ nur Singularitäten von niederer als erster Ordnung besitzt.

Wenn der Kern $K(s, t)$ bzw. $K(xy, \xi\eta)$ einer Integralgleichung nicht symmetrisch ist, so verstehen wir unter dem aus $K(s, t)$ bzw. $K(xy, \xi\eta)$ zweifach zusammengesetzten Kern die Funktionen

$$KK(s, t) = \int_a^b K(s, r)\,K(r, t)\,dr$$

bzw.

$$KK(xy, \xi\eta) = \int_{(J)} K(xy, \mathfrak{x}\mathfrak{y})\,K(\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \xi\eta)\,dJ.$$

Auch die Begriffe *Eigenwert* und *Eigenfunktion* sind unmittelbar auf den unsymmetrischen Kern übertragbar. Es kann nun vorkommen, daß der zweifach zusammengesetzte Kern $KK(s, t)$ bzw. $KK(xy, \xi\eta)$ an den Stellen

$$s = t \quad \text{bzw.} \quad x = \xi, \quad y = \eta$$

nur von niederer als der $\frac{1}{2}$ten bzw. der ersten Ordnung singulär ist, während dies für den ursprünglichen Kern $K(s, t)$ bzw. $K(xy, \xi\eta)$ nicht

zutrifft.[1]) In diesem Falle können wir von folgenden Sätzen Gebrauch machen, die von dem Zusammenhange zwischen den Integralgleichungen zweiter Art mit dem ursprünglichen und dem zweifach zusammengesetzten Kern handeln:

Satz 23. *Wenn $\lambda = 1$ ein Eigenwert der Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern $KK(s, t)$ ist, so gibt es unter den zu diesem Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen gewiß eine solche Eigenfunktion $\varphi(s)$, die entweder die Integralgleichung*

$$\varphi(s) = +\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

oder die Integralgleichung

$$\varphi(s) = -\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

befriedigt.

Zum Beweise setzen wir

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt; \tag{18}$$

dann wird

$$\int_a^b K(r, s)\,\psi(s)\,ds = \int_a^b KK(r, t)\,\varphi(t)\,dt$$

oder, da $\varphi(s)$ als Eigenfunktion von $KK(s, t)$ der Gleichung

$$\varphi(s) = \int_a^b KK(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{19}$$

genügt:

$$\varphi(r) = \int_a^b K(r, s)\,\psi(s)\,ds. \tag{20}$$

Tragen wir diesen Wert von $\varphi(r)$ in die rechte Seite von (18) ein, so entsteht

$$\psi(s) = \int_a^b KK(s, t)\,\psi(t)\,dt,$$

d. h. die Funktion $\psi(s)$ erfüllt die nämliche Integralgleichung wie $\varphi(s)$. Wir nehmen der Kürze wegen an, es gäbe nicht zwei voneinander linear unabhängige Lösungen $\varphi(s)$ der Gleichung (19); alsdann folgt notwendig

$$\psi(s) = c\varphi(s),$$

1) Diese Tatsache ist bereits von I. Fredholm bemerkt und in ähnlicher Weise wie hier zur Auflösung von Integralgleichungen benutzt worden, wenn der Kern für $s = t$ bzw. $x = \xi$, $y = \eta$ sich singulär verhält, vgl. Acta math. Bd. 27 S. 384.

wo c eine Konstante bedeutet. Die Berücksichtigung dieser Beziehung in (18) und (20) führt zu der Gleichung $c^2 = 1$, womit die in Satz 23 aufgestellte Behauptung bewiesen ist. Ebenso leicht gestaltet sich der Nachweis ohne jene Annahme.

Satz 24. *Wenn die Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern $KK(s, t)$ für den Parameterwert $\lambda = 1$, d. h. die Integralgleichung*

$$(21) \qquad F(s) = \varphi(s) - \int_a^b KK(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

lösbar ist und $\lambda = 1$ nicht gerade einen Eigenwert des Kerns $KK(s, t)$ bedeutet, so ist auch die Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern $K(s, t)$, nämlich die Integralgleichung

$$(22) \qquad f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

lösbar.

Zum Beweise setzen wir, wenn $f(s)$ eine gegebene Funktion bedeutet,

$$F(s) = f(s) + \int_a^b f(t) K(s, t)\,dt$$

und bezeichnen mit $\varphi(s)$ die Lösung der mit diesem $F(s)$ gebildeten Integralgleichung (21). Bilden wir dann die Funktion

$$(23) \qquad \psi(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s)$$

und setzen dieselbe in (21) an Stelle von $\varphi(s)$ ein, so ist die entstehende Gleichung genau dieselbe wie die, die man aus (21) durch Multiplikation mit $K(r, s)$ und Integration nach s erhält. Daraus folgt, daß auch $\psi(s)$ eine Lösung von (21) sein muß. Da aber $\lambda = 1$ kein Eigenwert des Kerns $KK(s, t)$ sein sollte, so besitzt diese Integralgleichung nur eine Lösung; daher muß $\varphi(s)$ mit $\psi(s)$ übereinstimmen, d. h. wegen (23): $\varphi(s)$ ist zugleich die gesuchte Lösung der Integralgleichung (22).

Nach diesen Vorbereitungen stellen wir uns nunmehr die Aufgabe, für ein beliebiges Gebiet J mit der Randkurve C die Greensche Funktion erster Art, d. h. diejenige Greensche Funktion $G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta)$, die zu der Randbedingung I gehört, für einen beliebigen Differentialausdruck $L(u)$ zu konstruieren.

Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst den Differentialausdruck

$$D(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y},$$

wo P eine beliebige innerhalb J und auf der Randkurve C stetig differenzierbare Funktion sein möge. Wir nehmen nun an, es sei die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion für den Differentialausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ bekannt, und bezeichnen dieselbe mit $\Gamma(xy, \xi\eta)$. Ist dann u eine innerhalb J zweimal stetig differenzierbare und auf C verschwindende Funktion, und setzen wir

(24) $$D(u) = f(xy),$$

so entnehmen wir aus der Formel (15) die Gleichung

$$u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{(J)} \Gamma(xy, \xi\eta)\left\{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - f\right\} dJ$$

und unter Anwendung der Regel für die Integration eines Produktes:

$$u(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(J)} \left\{\frac{\partial\left(\Gamma(xy, \xi\eta)\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\Gamma(xy, \xi\eta)\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\partial y}\right\} u(xy)\, dJ$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int_{(J)} \Gamma(xy, \xi\eta) f(xy)\, dJ,$$

d. h. die der Randbedingung I genügende innerhalb J stetige Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung (24) genügt der Integralgleichung

(25) $$F(\xi\eta) = u(\xi\eta) - \int_{(J)} K(xy, \xi\eta)\, u(xy)\, dJ,$$

wo zur Abkürzung

$$F(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(J)} \Gamma(xy, \xi\eta) f(xy)\, dJ,$$

$$K(xy, \xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial\left(\Gamma(xy, \xi\eta)\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\Gamma(xy, \xi\eta)\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\partial y}\right\}$$

gesetzt ist.

Wir betrachten nun den aus $K(xy, \xi\eta)$ zweifach zusammengesetzten Kern $KK(xy, \xi\eta)$. Da der Kern $K(xy, \xi\eta)$ für $x = \xi$, $y = \eta$ von der ersten Ordnung unendlich wird, so folgt leicht, daß der Kern $KK(xy, \xi\eta)$ für $x = \xi$, $y = \eta$ nur logarithmisch unendlich wird. Nach dem oben Gesagten (S. 68) ist daher die Integralgleichung zweiter Art

$$F^*(xy) = u^*(xy) - \lambda \int_{(J)} KK(xy, \xi\eta)\, u^*(\xi\eta)\, dJ$$

für den variablen Parameter λ auflösbar.

Wäre $\lambda = 1$ ein Eigenwert für diesen Kern $KK(xy, \xi\eta)$, so müßte nach Satz 23 eine Eigenfunktion $\varphi(xy)$ existieren, die zugleich auch eine der Integralgleichungen

$$\varphi(xy) = \pm \int_{(J)} K(xy, \xi\eta)\, \varphi(\xi\eta)\, dJ$$

befriedigt; dann aber wäre $\varphi(\xi\eta)$ ein auf der Randkurve C verschwindendes Integral einer der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\pm\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

Da aber für jede auf C verschwindende Funktion u die Identität

$$\int\limits_{(J)} e^{\pm P}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dJ=-\int\limits_{(J)} e^{\pm P}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\pm\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}u\,dJ$$

gilt, so würde sich $\varphi(xy)$ notwendig als Konstante und mithin gleich Null ergeben, was nicht der Fall sein sollte. Die Annahme, daß $\lambda = 1$ ein Eigenwert für den Kern $KK(xy, \xi\eta)$ sei, ist somit als unzutreffend erkannt.

Nunmehr lehrt Satz 24, daß auch die Integralgleichung (25) eine Lösung besitzt; diese Lösung $u(xy)$ ist das gewünschte Integral der Differentialgleichung (24), welches auf der Randkurve C verschwindet.

Es sei zur Abkürzung gesetzt:

$$P_\xi=\frac{\partial P(\xi\eta)}{\partial\xi},\qquad P_\eta=\frac{\partial P(\xi\eta)}{\partial\eta},$$

$$P_{\xi\xi}=\frac{\partial^2 P(\xi\eta)}{\partial\xi^2},\qquad P_{\xi\eta}=\frac{\partial^2 P(\xi\eta)}{\partial\xi\,\partial\eta},\qquad P_{\eta\eta}=\frac{\partial^2 P(\xi\eta)}{\partial\eta^2},$$

$$r=\left|\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right|,$$

$$\begin{aligned}\gamma_1=1&-\tfrac{1}{2}P_\xi(x-\xi)-\tfrac{1}{2}P_\eta(y-\eta)\\&+\tfrac{1}{16}\{3P_\xi^2+P_\eta^2-2P_{\xi\xi}+2P_{\eta\eta}\}(x-\xi)^2\\&+\tfrac{1}{4}\{P_\xi P_\eta-2P_{\xi\eta}\}(x-\xi)(y-\eta)\\&+\tfrac{1}{16}\{P_\xi^2+3P_\eta^2+2P_{\xi\xi}-2P_{\eta\eta}\}(y-\eta)^2.\end{aligned}$$

Wegen

$$D\left(\gamma_1 l\frac{1}{r}\right)=D(\gamma_1)\cdot l\frac{1}{r}-\left(2\frac{\partial\gamma_1}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}\gamma_1\right)\frac{x-\xi}{r^2}-\left(2\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial y}\gamma_1\right)\frac{y-\eta}{r^2}$$

folgt durch eine leichte Rechnung, daß $D\left(\gamma_1 l\frac{1}{r}\right)$ eine auch an den Stellen $x=\xi$, $y=\eta$ stetige Funktion wird. Wir bezeichnen mit γ_2 irgendeine Funktion von x, y, die innerhalb J zweimal stetig differenzierbar ist und auf der Randkurve C dieselben Werte wie $\gamma_1 l\frac{1}{r}$ annimmt, und konstruieren alsdann nach dem Vorstehenden die auf C verschwindende Lösung der Differentialgleichung (24) für

$$f(xy)=D\left(\gamma_1 l\frac{1}{r}-\gamma_2\right);$$

ist γ_3 diese Lösung, so stellt offenbar

$$G^{\mathrm{I}}=\gamma_1 l\frac{1}{r}-\gamma_2-\gamma_3$$

die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung $D(u)=0$ dar.

Mit Hilfe des Satzes 18 und unter Berücksichtigung einer früheren Bemerkung (S. 64) folgt dann auch die Existenz der zur Randbedingung I gehörigen Greenschen Funktion für den beliebigen Differentialausdruck $L(u)$.

Wir wenden uns nun zu der Frage nach der Existenz der zur Randbedingung II gehörigen Greenschen Funktion und betrachten zunächst den spezielleren Differentialausdruck

$$L^*(u) \equiv \frac{\partial\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y},$$

der aus $L(u)$ entsteht, wenn man $q = 0$ nimmt. Ist u eine der Differentialgleichung $L^*(u) = 0$ genügende Funktion, so gibt es offenbar eine Funktion v der nämlichen Veränderlichen x, y von der Art, daß

$$p\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$p\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

wird. Die Funktion v ist hierdurch bis auf eine additive Konstante bestimmt; sie genügt der Differentialgleichung

$$M^*(v) \equiv \frac{\partial\left(\frac{1}{p}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{1}{p}\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y} = 0$$

und heiße die zu u konjugierte Funktion.

Wenn durch s, n irgend zwei von einem Punkte ausgehende Richtungen bezeichnet werden, die in dem Sinne wie die positiven Richtungen der x- und y-Achse zueinander senkrecht stehen, so ist stets

$$p\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{1}{p}\frac{\partial v}{\partial s}.$$

Nehmen wir nun an, es gäbe für den Differentialausdruck $M^*(v)$ eine zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion G^I, so existiert notwendig für den Differentialausdruck $L^*(u)$ eine zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion G^{II}.

In der Tat läßt sich die zweite Randwertaufgabe für $L^*(u) = 0$ auf die erste Randwertaufgabe für $M^*(v) = 0$ zurückführen. Bezeichnen wir nämlich mit $f(s)$ die für $\frac{\partial u}{\partial n}$ vorgeschriebenen Werte auf der Randkurve C, so muß notwendig

$$\int\limits_{(C)} pf(s)\,ds = 0$$

ausfallen, und daher stellt

$$g(s) = -\int\limits_0^s pf(s)\,ds$$

eine stetige Funktion auf der Randkurve C dar. Wir bestimmen nun das Integral v der Differentialgleichung $M^*(v) = 0$ mit den Randwerten $g(s)$; ist alsdann $-u$ die zu v konjugierte Funktion, so besitzt u offenbar die vorgeschriebenen normalen Ableitungen auf der Randkurve C.

Wir wenden jetzt die Greensche Formel (14) an, indem wir in derselben für v die eben konstruierte Greensche Funktion G^{II} und für u irgendeine stetige Lösung von $L^*(u) = 0$ nehmen. G^{II} ist im gegenwärtigen Falle der Differentialgleichung $L^*(u) = 0$ eine Greensche Funktion im erweiterten Sinne, da die Konstante eine Lösung von $L^*(u) = 0$ mit verschwindender normaler Ableitung liefert; wir haben demgemäß

$$\psi^{(0)}(xy) = \frac{1}{\sqrt{J}},$$

$$L^*(G^{II}) = \frac{2\pi}{J},$$

$$\int_{(J)} G^{II}(xy, \xi\eta)\, dJ = 0,$$

worin J den Flächeninhalt des Gebietes J bedeutet. Die Greensche Formel (14) liefert

$$u(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \left[p\frac{\partial u}{\partial n} G^{II}\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} ds + \frac{1}{J}\int_{(J)} u\, dJ.$$

Setzen wir

$$[u(xy)]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} = u(s),$$

$$[v(xy)]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} = v(s),$$

$$[G^{II}(xy, \xi\eta)]_{\substack{x=a(s),\ \xi=a(\sigma)\\ y=b(s),\ \eta=b(\sigma)}} = G^{II}(s, \sigma),$$

so folgt

$$(26)\qquad u(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \frac{dv(s)}{ds} G^{II}(s, \sigma)\, ds + c_u,$$

wo c_u eine durch die Funktion u bestimmte Konstante bedeutet.

Andererseits gehen wir von der Gleichung $M^*(v) = 0$ aus und bezeichnen mit $H^{II}(xy, \xi\eta)$ die zugehörige Greensche Funktion für die Randbedingung II und mit $H^{II}(s, \sigma)$ die betreffende aus ihr entsprechend hervorgehende Funktion von s, σ. Da offenbar die zu $v(xy)$ konjugierte Funktion $-u(x, y)$ wird, so erhalten wir nunmehr die Gleichung

$$(27)\qquad v(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \frac{du(s)}{ds} H^{II}(s, \sigma)\, ds + c_v,$$

wo c_v wiederum eine Konstante bedeutet.

Die gefundenen Gleichungen (26), (27) sind Integralgleichungen erster Art mit den symmetrischen Kernen $G^{II}(s, \sigma)$, $H^{II}(s, \sigma)$. Diese Kerne sind von der Gestalt

$$cl(|s-\sigma|)+S(s,\sigma),$$

wo c eine Konstante und $S(s, \sigma)$ eine stetige Funktion von s, σ bedeutet. Mittelst (27) folgern wir dann, daß $v(\sigma)$ gewiß einmal stetig differentiierbar ist, sobald $\frac{du(s)}{ds}$ einmal, d. h. sobald $u(s)$ zweimal stetig differentiierbar ist. Da unter dieser Voraussetzung die Formel (27) die Integralgleichung (26) auflöst, so schließen wir leicht, daß der Kern $G^{II}(s, \sigma)$ der Integralgleichung (26) sowohl abgeschlossen wie allgemein ist.

Als Beispiel wählen wir den Fall $p = 1$, wo die Gleichung $L^*(u) = 0$ die bekannte Potentialgleichung wird; als Gebiet J diene der Kreis mit dem Radius 1. Die Rechnung ergibt das Statthaben der Relationen

$$u(\sigma)= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{dv(s)}{ds}\,l\left(2\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|\right)ds,$$

$$v(\sigma)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{du(s)}{ds}\,l\left(2\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|\right)ds,$$

wobei $u(s)$ die Werte des Realteiles, $v(s)$ diejenigen des Imaginärteiles einer analytischen Funktion auf der Kreisperipherie bedeuten, während die Gleichungen

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}u(s)\,ds=0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}v(s)\,ds=0$$

erfüllt sind.

Setzen wir an Stelle der Veränderlichen s, σ bzw. πx, $\pi\xi$, so nehmen die gefundenen Formeln die Gestalt an

$$(28)\quad u(\xi)= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dv(x)}{dx}\,l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-\xi}{2}\right|\right)dx=-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}v(x)\operatorname{cotg}\left(\pi\frac{x-\xi}{2}\right)dx,$$

$$(29)\quad v(\xi)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{du(x)}{dx}\,l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-\xi}{2}\right|\right)dx= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}u(x)\operatorname{cotg}\left(\pi\frac{x-\xi}{2}\right)dx.$$

Die letztere Formel (29) geht durch Produktintegration und Differentiation nach x in die Formel

$$\frac{dv(\xi)}{d\xi}=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{d^2u(x)}{dx^2}\,l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-\xi}{2}\right|\right)dx$$

über. Die Einsetzung dieses Wertes von $\frac{dv}{dx}$ in die erstere Formel (28) liefert

$$(30)\quad u(\xi) = -\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\frac{d^2u(x)}{dx^2}\left\{\int_{-1}^{+1} l\left(2\left|\sin\pi\frac{\xi-y}{2}\right|\right) l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-y}{2}\right|\right)dy\right\}dx;$$

diese Formel gilt für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion u, die von -1 bis $+1$ integriert Null liefert.

Wenden wir nun Satz 11 (S. 46) auf den Differentialausdruck $\frac{d^2u}{dx^2}$ an, indem wir als Greensche Funktion die zu den Randbedingungen IV gehörige, oben (S. 45) berechnete Funktion wählen, so folgt für jede zweimal stetig differenzierbare, jenen Randbedingungen genügende Funktion u die Identität

$$(31)\quad u(x) = -\int_{-1}^{+1}\left\{-\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}(x-\xi)^2 + \tfrac{1}{6}\right\}\frac{d^2u(x)}{dx^2}\,dx.$$

Aus den Formeln (30) und (31) entnehmen wir durch eine sehr leichte Überlegung, daß notwendig

$$-\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}(x-\xi)^2 + \tfrac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1} l\left(2\left|\sin\pi\frac{\xi-y}{2}\right|\right) l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-y}{2}\right|\right)dy$$

sein muß; wenn wir also die symmetrischen Funktionen

$$K(x,\xi) = \frac{1}{\pi}\, l\left(2\left|\sin\pi\frac{\xi-x}{2}\right|\right),$$

$$KK(x,\xi) = -\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}(x-\xi)^2 + \tfrac{1}{6}$$

als Kerne auffassen, so ist der letztere derjenige Kern, der aus dem ersteren durch zweifache Zusammensetzung entsteht. Der Kern $K(x,\xi)$ muß mithin dieselben Eigenfunktionen besitzen, wie $KK(x,\xi)$; dieselben sind nach dem Obigen (S. 55)

$$\sin m\pi x,\quad \cos m\pi x,\qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Eigenwerte von $K(x,\xi)$ sind die Quadratwurzeln aus den Eigenwerten des Kerns $KK(x,\xi)$, d. h. da jener Kern definit ist, gleich den ganzen positiven Vielfachen von π. Diese Eigenwerte sind zweifach; doch ist der Eigenwert Null, zu dem die Konstante als Eigenfunktion gehört, noch als einfacher Eigenwert hinzuzurechnen.

Die Formeln (28), (29) sind wegen ihrer fruchtbaren Anwendung auf die Theorie der analytischen Funktionen von besonderer Wichtigkeit.[1])

1) Vgl. O. D. Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichungen, Inauguraldissertation Göttingen 1902, wo einige der in den Vorlesungen des Verfassers dargelegten Anwendungen berührt werden.

Wir haben oben die Greensche Funktion $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ für den Differentialausdruck $L^*(u)$ konstruiert. Wenn aber die Gleichung $L^*(u) = 0$ eine zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion besitzt, so folgt aus Satz 18 unter Heranziehung einer früheren Bemerkung (S. 64) auch die Existenz der Greenschen Funktion $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ für den allgemeinen Differentialausdruck

$$L(u) = L^*(u) + qu.$$

Wir kommen endlich auf das zu Beginn dieses Kapitels in Aussicht gestellte Problem zurück.

Es sei für das Gebiet J der xy-Ebene die sich selbst adjungierte Differentialgleichung $L(u) = 0$ vorgelegt; man soll dasjenige Integral dieser Differentialgleichung finden, welches auf der Randkurve C des Gebietes J die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u + h(s) = 0 \tag{32}$$

erfüllt, wo λ den Parameter und $h(s)$ eine gegebene Funktion der Bogenlänge s auf der Randkurve C bedeutet. $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ bezeichne wiederum die zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion, so daß überall auf der Randkurve C

$$\frac{\partial G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)}{\partial n} = 0$$

wird; alsdann gilt die Formel (18) und wegen (32) erhält diese die Gestalt

$$u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} [p(xy)\,(\lambda u(xy) + h(s))\,G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}}\, ds;$$

diese Formel werde mit $\sqrt{p(\xi\eta)}$ multipliziert und in ihr $\xi = a(\sigma)$, $\eta = b(\sigma)$ genommen. Setzen wir dann zur Abkürzung

$$[\sqrt{p(\xi, \eta)}\,u(\xi, \eta)]_{\substack{\xi=a(\sigma)\\ \eta=b(\sigma)}} = \varphi(\sigma),$$

$$\frac{1}{2\pi}[\sqrt{p(xy)p(\xi, \eta)}\,G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)]_{\substack{x=a(s),\ \xi=a(\sigma)\\ y=b(s),\ \eta=b(\sigma)}} = K(s, \sigma),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}[p(xy)\sqrt{p(\xi, \eta)}\,G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)]_{\substack{x=a(s),\ \xi=a(\sigma)\\ y=b(s),\ \eta=b(\sigma)}} h(s)\,ds = f(\sigma),$$

so erhält sie die einfache Gestalt

$$f(\sigma) = \varphi(\sigma) - \lambda\int\limits_{(C)} K(s, \sigma)\,\varphi(s)\,ds. \tag{33}$$

Da wegen des Symmetriegesetzes der Greenschen Funktion auch die Funktion $K(s, \sigma)$ in den Veränderlichen s, σ symmetrisch wird, so er-

kennen wir in der Gleichung (33) eine Integralgleichung zweiter Art, die genau von derjenigen Gestalt ist, wie wir sie im ersten Abschnitt behandelt haben. Der Kern $K(s, \sigma)$ dieser Integralgleichung ist in den Variabeln s, σ stetig außer für $s = \sigma$, wo $K(s, \sigma)$ wie der mit einer Konstanten multiplizierte Logarithmus von $|s - \sigma|$ unendlich wird.

Wir bezeichnen die Eigenwerte $\lambda^{(m)}$ und Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(s)$ der Integralgleichung (33) auch als *die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen der Randbedingung*

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0$$

für die Differentialgleichung $L(u) = 0$.

Da $K(s, \sigma)$ nach der obigen Bemerkung (S. 75) ein abgeschlossener und allgemeiner Kern ist, so folgen, wenn wir die oben (S. 74) gefundene Auflösung der Integralgleichung erster Art (26) berücksichtigen, aus den Sätzen 3—7 des Abschnittes I eine Reihe von Tatsachen, unter denen der Kürze halber nur die folgende hervorgehoben werde:

Satz 25. *Jede zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Rand kurve C ist in der Fourierschen Weise in eine Reihe entwickelbar, die na[...] den Eigenfunktionen der Randbedingung*

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0$$

fortschreitet; die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Aus den letzten Betrachtungen kann zugleich die Existenz ein[...] Randbedingung III gehörigen Greenschen Funktion G^{III} gefolgert [...] Da wir oben unter der Annahme der Greenschen Funktion G^{I} [...] Potentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ die Existenz von G^{I} und G^{II} für [...] gemeinen Differentialausdruck $L(u)$ bewiesen haben, so könne[...] sammenfassend folgendes Resultat aussprechen:

Satz 26. *Für einen Differentialausdruck $L(u)$ gibt es stet[...]schen Funktionen G^{I}, G^{II}, G^{III}, die zu den Randbedingungen [...] I, II, III gehören, wobei besonderenfalls der Begriff der Greenschen Fu[...] weiterten Sinne zu verstehen ist.*

Um noch kurz das zugehörige Variationsproblem zu be[...]en, nehmen wir an, es sei q eine innerhalb J nirgends positive F[...]; alsdann wird das Integral

$$D(u) = \int\limits_{(J)} \left\{ p \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) - q u^2 \right\} d.$$

gewiß niemals negative Werte erhalten. Sollen wir nun diejenige Funk-

tion u bestimmen, die $D(u)$ zu einem Minimum macht, während für die Randwerte von u die Bedingung

$$\int\limits_{(C)} p u^2 ds = 1$$

erfüllt ist, so führt die Variationsrechnung auf die Differentialgleichung $L(u) = 0$, während am Rande die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0 \qquad (\lambda = \text{konst.})$$

gelten muß. (Dirichletsches Variationsproblem.)

Setzen wir, wenn $u(xy)$ irgendeine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ bedeutet, zur Abkürzung

$$\omega(s) = \left[\sqrt{p(xy)}\,\frac{\partial u(xy)}{\partial n}\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}},$$

so ist wegen Formel (17)

$$\left[\sqrt{p(\xi\eta)}\,u(\xi\eta)\right]_{\substack{\xi=a(\sigma)\\ \eta=b(\sigma)}} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}\left[p(xy)\sqrt{p(\xi\eta)}\,G^{\mathrm{II}}(xy,\xi\eta)\,\frac{\partial u(xy)}{\partial n}\right]_{\substack{x=a(s),\ \xi=a(\sigma)\\ y=b(s),\ \eta=b(\sigma)}} ds$$

$$= -\int\limits_{(C)} K(s,\sigma)\,\omega(s)\,ds.$$

[illegible]lererseits wird

$$D(u) = -\int\limits_{(J)} u L(u)\,dJ - \int\limits_{(C)} p u \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$

$$= \int\limits_{(C)}\int\limits_{(C)} K(s,\sigma)\,\omega(s)\,\omega(\sigma)\,ds\,d\sigma.$$

[illegible]rnach geht das vorige Variationsproblem in folgende Aufgabe [illegible]n soll eine Funktion $\omega(s)$ bestimmen, für welche das Integral

$$\int\limits_{(C)}\int\limits_{(C)} K(s,\sigma)\,\omega(s)\,\omega(\sigma)\,ds\,d\sigma$$

ein [illegible]m wird, wenn die Nebenbedingung

$$\int\limits_{(C)}\Big\{\int\limits_{(C)} K(s,\sigma)\,\omega(s)\,ds\Big\}^2 d\sigma = 1$$

[illegible]außsches Variationsproblem).

Die [illegible]l (34) lehrt, daß bei unseren Annahmen der Kern $K(s,\sigma)$ definit ist [illegible] daher die Eigenwerte sämtlich positiv ausfallen; wir bezeichnen die [illegible]enwerte und die Eigenfunktionen des Kerns $K(s,\sigma)$ mit $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ b[illegible] $\psi^{(1)}(s), \psi^{(2)}(s), \ldots$.

In ganz a[illegible]ger Weise, wie in Kapitel VII (S. 57—58) ausgeführt wurde, erkennen wir nunmehr leicht, daß

$$\omega(s) = \lambda^{(1)}\psi^{(1)}(s)$$

das gewünschte Minimum liefert; mithin ist:

$$[\sqrt{p(xy)}\,u(xy)]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} = \psi^{(1)}(s).$$

Eine interessante Anwendung findet unser Satz 25 zur Lösung des Problems der kleinen Schwingungen einer in einem Gefäße befindlichen, der Schwere unterworfenen Flüssigkeit.[1]) Hierbei handelt es sich um die Auffindung des Geschwindigkeitspotentiales U. Dasselbe ist eine Funktion des Ortes x, y und der Zeit t, die im Innern der Flüssigkeit für alle Zeiten t der Gleichung

$$\varDelta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

an der festen Wand für alle t der Bedingung

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

und auf der Horizontalen $y = 0$ für alle t der Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

genügt, während für $t = 0$ die freie Oberfläche in der Horizontalen $y = 0$ liegen und daselbst die vertikale Geschwindigkeit $\frac{\partial U}{\partial y}$ als Funktion von x etwa $= f(x)$ gegeben sein soll.

Der Ansatz

$$U = u \cos\left(\sqrt{\lambda}\, t\right)$$

liefert für die von t unabhängige Funktion u an der festen Wand die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

und an der Horizontalen $y = 0$ die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0, \quad (\lambda = \text{konst.}),$$

während im Inneren der Flüssigkeit überall $\varDelta u = 0$ sein muß. In der voranstehenden allgemeineren Entwicklung haben wir mithin $p = 1$, $q = 0$ zu nehmen und das Randintegral nicht über die ganze Randkurve C, sondern nur über die Horizontale $y = 0$ zu erstrecken. Bedeutet also $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ die zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion für das von der Gefäßwand und der Horizontalen $y = 0$ begrenzte Gebiet, so lautet der in Betracht kommende Kern

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} G^{\mathrm{II}}(x0, \xi 0).$$

---

1) Vgl. insbesondere Poincaré, Journ. de Math., 1896.

Bezeichnen wir mit $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \psi^{(1)}(x), \psi^{(2)}(x), \ldots$ die Eigenwerte bzw. die Eigenfunktionen dieses Kerns und entwickeln wir die gegebene Funktion $f(x)$ nach diesen Eigenfunktionen, wie folgt

$$f(x) = c_1\psi^{(1)}(x) + c_2\psi^{(2)}(x) + \cdots,$$

so wird das hydrodynamische Problem durch die Formeln

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{y=0} = c_1\psi^{(1)}(x)\cos(\sqrt{\lambda^{(1)}}t) + c_2\psi^{(2)}(x)\cos(\sqrt{\lambda^{(2)}}t) + \cdots$$

$$[U]_{y=0} = \frac{c_1\psi^{(1)}(x)}{\lambda^{(1)}}\cos(\sqrt{\lambda^{(1)}}t) + \frac{c_2\psi^{(2)}(x)}{\lambda^{(2)}}\cos(\sqrt{\lambda^{(2)}}t) + \cdots$$

gelöst.

Die Ausdehnung unserer Untersuchungsmethode auf mehr als zwei Veränderliche bietet keine prinzipielle Schwierigkeit.

Dritter Abschnitt.

Anwendungen auf Probleme der Funktionentheorie.

Zehntes Kapitel.

Riemanns Probleme in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Riemann hat in seiner Inauguraldissertation (Abschnitt 19) die allgemeine Aufgabe gestellt, Funktionen einer komplexen Veränderlichen innerhalb eines von einer gegebenen Randkurve begrenzten Gebietes der komplexen Ebene zu bestimmen, wenn zwischen den Real- und Imaginärteilen der Funktionen auf jener Randkurve Relationen gelten sollen, deren Koeffizienten auf der Randkurve sich stetig ändernde gegebene Funktionen sind. Die Theorie der Integralgleichungen bietet die Mittel zur Lösung dieser Riemannschen Fragestellung für den Fall, daß die auf der Randkurve gegebenen Relationen lineare sind.[1])

Die Methode der Integralgleichungen ist auch auf weit allgemeinere Probleme anwendbar; sie führt insbesondere nicht nur zum Ziele, wenn für die Werte der gesuchten Funktionen selbst auf der Randkurve lineare homogene oder inhomogene Relationen vorgeschrieben sind, sondern auch, wenn noch die Ableitungen erster oder höherer Ordnung der gesuchten

1) Man vgl. einen Vortrag des Verfassers „Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie. Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses Heidelberg 1904", sowie die Dissertationen von Kellogg und Haseman, Göttingen 1902 u. 1907; vgl. auch den Auszug aus der Dissertation von Haseman: Math. Ann. Bd. 66.

Funktionen mit den Funktionswerten auf der Randkurve in linearer Weise verknüpft auftreten. Durch Behandlung solcher Aufgaben wird, wie mir scheint, der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln ein neues dankbares Kapitel hinzugefügt.

Die in dem oben zitierten Vortrage zur Erläuterung der Methode gewählte Aufgabe ist freilich wegen ihrer besonderen Einfachheit auch ohne dieses Hilfsmittel lösbar, und zwar, indem man zweimal die gewöhnliche Randwertaufgabe aus der Theorie des logarithmischen Potentials anwendet.

Das dort behandelte Problem besteht darin, innerhalb einer geschlossenen Kurve C mit stetig sich ändernder Tangente und von der Gesamtbogenlänge l eine regulär analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$

$$f(z) = u(xy) + iv(xy)$$

zu finden, deren Real- und Imaginärteil $u(s)$ bzw. $v(s)$ auf C der linearen Relation

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) + c(s) = 0$$

genügen; dabei sind $a(s), b(s), c(s)$ als stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s mit der Periode l — die ersteren beiden $a(s), b(s)$ ohne gemeinsame Nullstelle — gegeben.[1]

Ich will nun kurz zeigen, wie man eine dieser Aufgabe genügende Funktion findet, die innerhalb C (nicht notwendig auf C) den Charakter einer ganzen Funktion besitzt. Zu dem Zwecke bezeichne ich mit $2ni\pi$ die Änderung, die $l(a(s) + ib(s))$ beim positiven Umlauf längs der geschlossenen Kurve C erfährt. Durch den Imaginärteil von $l(a(s) + ib(s))$, d. h. durch einen Zweig des Ausdruckes

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{arctg} \frac{b(s)}{a(s)},$$

wird dann eine reelle Funktion auf C dargestellt, die von s stetig abhängt mit Ausnahme eines Punktes, etwa des Punktes $s = 0$, wo ein Sprung ihrer Werte um $2n\pi$ stattfindet.

Mittelst der bekannten Randwertaufgabe in der Theorie des logarith-

1) Aus dem oben zitierten Heidelberger Vortrage geht unmittelbar nur hervor, daß überhaupt eine der Aufgabe genügende Funktion vom Charakter einer rationalen Funktion existiert. Es ist jedoch leicht möglich, durch eine geringe Modifikation des dort angegebenen Verfahrens die etwa innerhalb C auftretenden Pole auf die Kurve C selbst zu verlegen. Ebenso leicht kann man übrigens, indem man den Begriff des Cauchyschen Index heranzieht oder wie hier weiterhin im Text verfährt, feststellen, wann eine Funktion der Aufgabe genügt, die überall innerhalb und auf dem Rande von C den Charakter einer ganzen Funktion hat, und wie groß die Mannigfaltigkeit solcher Lösungen ist.

mischen Potentials bestimme man nun eine analytische Funktion $F(z)$, die sich innerhalb der Kurve C wie eine ganze Funktion verhält und deren Imaginärteil die Randwerte (1) besitzt. Wird dann

$$G(z) \equiv e^{F(z)} = U(xy) + i\,V(xy)$$

gesetzt, während

$$U(s) + i\,V(s)$$

die Randwerte dieser Funktion $G(z)$ bezeichnen, so erkennen wir auf der Kurve C die Übereinstimmung der Imaginärteile von

$$l(U(s) + i\,V(s)) \text{ und } l(a(s) + ib(s)),$$

d. h. es ist auf der Kurve C

$$a(s)\,V(s) - b(s)\,U(s) = 0.$$

Endlich konstruieren wir eine analytische Funktion $f^*(z)$, die innerhalb C den Charakter einer ganzen Funktion hat und deren Realteil auf C die Randwerte

$$-\frac{c(s)\,U(s)}{a(s)(U^2(s) + V^2(s))} = -\frac{c(s)\,V(s)}{b(s)(U^2(s) + V^2(s))}$$

besitzt; dann ist

$$f(z) = G(z) f^*(z)$$

eine analytische Funktion, die das vorgelegte Problem löst.

Die gefundene Funktion $f(z)$ hat innerhalb C den Charakter einer ganzen Funktion; sie besitzt jedoch, wenn n negativ ausfällt, auf C im Punkte $s = 0$ einen Pol $-2n$ ter Ordnung.

Wir wenden uns nunmehr zu einer Aufgabe, welche als eine der einfachsten Aufgaben in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen im Sinne der Riemannschen Fragestellung angesehen werden kann: es ist dies die Aufgabe, eine außerhalb der geschlossenen Kurve C regulär analytische Funktion $f_a(z)$ und eine innerhalb C regulär analytische bzw. sich wie eine rationale Funktion verhaltende Funktion $f_j(z)$ zu finden, so daß die Randwerte beider Funktionen auf der Kurve C selbst in einem gegebenen komplexen Verhältnis stehen, d. h. daß

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

wird, wo in dem komplexen Ausdrucke

$$c(s) = a(s) + ib(s)$$

Real- und Imaginärteil $a(s)$, $b(s)$ als zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s — ohne gemeinsame Nullstelle — gegeben sind. Die Kurve C werde der Einfachheit halber analytisch vorausgesetzt.

Um diese Aufgabe zu lösen, konstruieren wir zunächst eine Greensche Funktion $G_j(xy, \xi\eta)$ von folgender Art: sie soll in bezug auf xy innerhalb C überall der Gleichung

$$\frac{\partial^2 G_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G_j}{\partial y^2}=0$$

genügen, ferner an der innerhalb C gelegenen Stelle $\xi\eta$ logarithmisch unendlich werden derart, daß bei dem Ansatze

$$(2)\qquad G_j(xy,\xi\eta)=-\log\left|\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right|+A(xy,\xi\eta)$$

die Funktion $A(xy,\xi\eta)$ regulär analytisch in x, y, ξ, η ausfällt, und endlich soll die in Richtung der inneren Normalen genommene Ableitung von $G_j(xy,\xi\eta)$ auf C einen von s unabhängigen Wert $\varkappa$ besitzen. Lassen wir den Punkt xy bzw. die Punkte xy und $\xi\eta$ in die Randpunkte s bzw. s und σ wandern, so mögen die betreffenden Werte der Greenschen Funktion mit

$$G_j(s,\xi\eta)\ \text{bzw.}\ G_j(s,\sigma)$$

bezeichnet werden.

Wenn $u_j(xy)$ irgendeine innerhalb C der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}=0$$

genügende stetige Funktion, $\frac{\partial u_j}{\partial n}$ ihre in Richtung der inneren Normalen genommene Ableitung auf C und $u_j(s)$ ihre Randwerte auf C bezeichnen, so liefert die Greensche Formel in bekannter Weise:

$$(3)\qquad u_j(\xi\eta)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_j(s,\xi\eta)\frac{\partial u_j}{\partial n}\,ds+\frac{\varkappa}{2\pi}\int_0^l u_j(s)\,ds,$$

wo l die Gesamtlänge von C bedeutet. Für $u_j=1$ folgt hieraus

$$\varkappa=\frac{2\pi}{l}.$$

Nunmehr sei $v_j(xy)$ eine zu $u_j(xy)$ konjugierte Potentialfunktion, so daß

$$u_j(xy)+iv_j(xy)$$

eine innerhalb C reguläre analytische Funktion der komplexen Variabeln z bedeutet. Bezeichnet $v(s)$ deren Randwerte, so ist

$$\frac{\partial u_j}{\partial n}=-\frac{dv_j(s)}{ds}.$$

Mit Rücksicht hierauf entsteht aus der Gleichung (3), wenn wir den Punkt $\xi\eta$ in den Randpunkt σ wandern lassen:

$$u_j(\sigma)=+\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_j(s,\sigma)\frac{dv_j}{ds}\,ds+\frac{1}{l}\int_0^l u_j(s)\,ds$$

oder bei Vertauschung von s, σ:

$$(4)\qquad u_j(s)=+\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_j(\sigma,s)\frac{dv_j}{d\sigma}\,d\sigma+\frac{1}{l}\int_0^l u_j(\sigma)\,d\sigma.$$

Aus (2) entnehmen wir[1])

$$G_j(\sigma, s) = -2 \log \left| \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi}{l}(\sigma - s) \right| + A^*(\sigma, s),$$

wo $A^*(\sigma, s)$ eine reguläre analytische Funktion von σ, s ist. Demnach wird

$$(5) \qquad \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} = 2 \frac{\pi}{l} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{l}(s - \sigma) + \frac{\partial A^*(\sigma, s)}{\partial \sigma}.$$

Unter Anwendung der Formel für die Produktintegration nimmt (4) die Gestalt an:

$$(6) \qquad u_j(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} v_j(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{l} \int_0^l u_j(\sigma)\, d\sigma,$$

wo für das erste Integral rechter Hand sein Cauchyscher Hauptwert zu nehmen ist; derselbe existiert gewiß stets dann, wenn $v_j(\sigma)$ eine stetig differenzierbare Funktion von σ ist.

Die eben gefundene Formel (6) gilt, wenn $u_j(s) + iv_j(s)$ die Randwerte auf C irgendeiner Funktion der komplexen Veränderlichen z

$$f_j(z) = u_j(x, y) + iv_j(xy)$$

sind, die innerhalb C den Charakter einer ganzen Funktion hat. Wenden wir diese Formel auf die Funktion $if_j(z)$ an, so entsteht:

$$(7) \qquad v_j(s) = +\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} u_j(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{l} \int_0^l v_j(\sigma)\, d\sigma,$$

wo wieder für das erste Integral rechter Hand der Cauchysche Hauptwert zu nehmen ist.

Ist also der Realteil $u_j(s)$ einer innerhalb C regulären Funktion auf C bekannt, so findet man die Randwerte des Imaginärteiles $v_j(s)$ durch die Formel

$$(7^*) \qquad v_j(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} u_j(\sigma)\, d\sigma,$$

wobei über die additive Konstante in $v_j(s)$ alsdann derart verfügt ist, daß

$$\int_0^l v_j(\sigma)\, d\sigma = 0$$

ausfällt. Ist andererseits der Imaginärteil $v_j(s)$ einer innerhalb C regulären Funktion auf C bekannt, so findet man die Randwerte des Realteiles $u_j(s)$ durch die Formel

1) Vgl. E. E. Levi, Nachr. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen 1908, S. 249. In meiner ursprünglichen Veröffentlichung war im folgenden irrtümlich der Faktor 2 weggeblieben.

(7**) $$u_j(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} v_j(\sigma)\, d\sigma,$$

wobei über die additive Konstante in $u_j(s)$ alsdann derart verfügt ist, daß

$$\int_0^l u_j(\sigma)\, d\sigma = 0$$

ausfällt.

Wir führen nunmehr, wenn $W(s)$ irgendeinen komplexen Ausdruck auf C bedeutet, die Abkürzung ein:

$$M_j W = \frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma} W(\sigma)\, d\sigma.$$

Die Formeln (6) und (7) lassen sich dann in die folgende zusammenfassen

$$f_j(s) = M_j f_j + \frac{1}{l}\int_0^l f_j(\sigma)\, d\sigma,$$

wobei

$$f_j(s) = u_j(s) + i v_j(s)$$

gesetzt ist. Hiernach stellt also das Integral

$$M_j f_j$$

wiederum wesentlich die Funktion $f_j(s)$ dar, diese nur um eine komplexe Konstante derart vermehrt, daß das über die Kurve C erstreckte Integral verschwindet. Man sieht auch zugleich, daß diese letztere Darstellung eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß der komplexe Ausdruck

$$f_j(s) = u_j(s) + i v_j(s)$$

den Randwerten einer innerhalb C regulären Funktion der komplexen Veränderlichen gleich ist.

Endlich gilt die Tatsache, daß, wenn $w(s)$ einen willkürlichen komplexen Ausdruck auf C bedeutet, der Ausdruck

$$w + M_j w$$

stets die Randwerte einer innerhalb C regulären Funktion der komplexen Variabeln darstellt. Wir erkennen dies, indem wir für $w(s)$ erst einen reellen und dann einen rein imaginären Ausdruck nehmen und jedesmal bzw. (7*), (7**) anwenden.

Nunmehr konstruieren wir eine Greensche Funktion $G_a(xy, \xi\eta)$ von folgender Art: sie soll in bezug auf x, y außerhalb C überall der Gleichung

$$\frac{\partial^2 G_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_a}{\partial y^2} = 0$$

genügen, ferner an der außerhalb C gelegenen Stelle $\xi\eta$ logarithmisch unendlich werden, derart daß bei dem Ansatze

$$G_a(xy, \xi\eta) = -\log\left|\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right| + B(xy, \xi\eta)$$

die Funktion $B(xy, \xi\eta)$ regulär analytisch in x, y, ξ, η ausfällt, und endlich sollen die in Richtung der äußeren Normalen genommenen Ableitungen von $G_a(xy, \xi\eta)$ auf C einen von s unabhängigen Wert λ besitzen. Lassen wir den Punkt xy bzw. die Punkte xy und $\xi\eta$ in die Randpunkte s bzw. s und σ wandern, so mögen die betreffenden Werte der Greenschen Funktion mit

$$G_a(s, \xi\eta) \text{ bzw. } G_a(s, \sigma)$$

bezeichnet werden.

Wenn $u_a(xy)$ irgendeine außerhalb C der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_a}{\partial y^2} = 0$$

genügende stetige (auch im Unendlichen endlich bleibende) Funktion, $\frac{\partial u_a}{\partial n}$ ihre in Richtung der äußeren Normalen genommenen Ableitungen auf C und $u_a(s)$ ihre Randwerte auf C bezeichnen, so erhalten wir in bekannter Weise

$$(8) \qquad u_a(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_a(s, \xi\eta)\,\frac{\partial u_a}{\partial n}\,ds + \frac{1}{l}\int_0^l u_a(s)\,ds.$$

Nunmehr sei $v_a(xy)$ eine zu $u_a(xy)$ konjugierte Potentialfunktion, so daß

$$u_a(xy) + iv_a(xy)$$

eine außerhalb C reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen z bedeutet. Bezeichnet $v_a(s)$ die Randwerte von $v_a(xy)$, so ist

$$\frac{\partial u_a}{\partial n} = \frac{dv_a(s)}{ds},$$

und mit Rücksicht hierauf folgt aus (8)

$$(9) \qquad u_a(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l G_a(\sigma, s)\,\frac{dv_a(\sigma)}{d\sigma}\,d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l u_a(\sigma)\,d\sigma.$$

Setzen wir

$$G_a(\sigma, s) = -2\log\left|\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}(\sigma - s)\right| + B^*(\sigma, s),$$

wo $B^*(\sigma, s)$ eine stetig differenzierbare Funktion von σ, s ist, so wird

$$(10) \qquad \frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} = 2\,\frac{\pi}{l}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(s - \sigma) + \frac{\partial B^*(\sigma, s)}{\partial \sigma}.$$

Die Formel (9) transformieren wir in die Gestalt

$$(11) \qquad u_a(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} v_a(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l u_a(\sigma)\,d\sigma$$

und fügen dieser die entsprechende Formel für $v_a(s)$ hinzu:

$$(12) \qquad v_a(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} u_a(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{l}\int_0^l v_a(\sigma)\,d\sigma.$$

In den beiden letzten Formeln sind für die ersten Integrale rechter Hand die Cauchyschen Hauptwerte zu nehmen.

Wir führen nunmehr, wenn $W(s)$ irgendeinen komplexen Ausdruck auf C bedeutet, die Abkürzung ein:

$$M_a W = \frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma} W(\sigma)\,d\sigma.$$

Die beiden Formeln (11) und (12) lassen sich dann in die folgende zusammenfassen

$$f_a(s) = -M_a f_a + \frac{1}{l}\int_0^l f_a(\sigma)\,d\sigma,$$

wobei

$$f_a(s) = u_a(s) + i v_a(s)$$

gesetzt ist. Hiernach stellt also das Integral

$$-M_a f_a$$

wiederum wesentlich die Funktion $f_a(s)$ dar, diese nur um eine komplexe Konstante derart vermehrt, daß das über die Kurve C erstreckte Integral verschwindet. Man sieht auch zugleich, daß diese Darstellung eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß der komplexe Ausdruck

$$f_a(s) = u_a(s) + i v_a(s)$$

den Randwerten einer außerhalb C regulären Funktion der komplexen Veränderlichen gleich ist.

Endlich erkennen wir noch, daß, wenn $w(s)$ einen willkürlichen komplexen Ausdruck auf C bedeutet, der Ausdruck

$$w - M_a w$$

stets die Randwerte einer außerhalb C regulären Funktion der komplexen Veränderlichen darstellt.

Wegen (5) und (10) ist für jeden komplexen Ausdruck W identisch

$$(13) \qquad M_a W = M_j W + \int_0^l D(\sigma, s)\, W(\sigma)\,d\sigma,$$

wo $D(\sigma, s)$ eine regulär analytische Funktion der reellen Variabeln σ, s mit rein imaginären Werten bedeutet.

Nunmehr kehren wir zu unserer Aufgabe zurück, die Funktionen $f_a(z), f_j(z)$ zu finden derart, daß ihre Randwerte auf C die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s) \tag{14}$$

erfüllen. Wir setzen — unter Fortlassung des Argumentes s —

$$\begin{cases} F_a = \quad f_a + M_a f_a \\ F_j = -f_j + M_j f_j + \gamma, \end{cases} \tag{15}$$

wo γ eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet, und ferner

$$c(\sigma) = c(s) + c(\sigma, s) \sin \frac{\pi}{l} (s - \sigma), \tag{16}$$

wo $c(\sigma, s)$ eine komplexe Funktion bedeutet, die wegen der angenommenen zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von $c(s)$ gewiß einmal stetig differenzierbar nach s, σ wird.

Wenden wir nun auf (14) die Operation M_a an, so entsteht mit Rücksicht auf (13) die Gleichung

$$M_a f_a = M_j(c f_j) + \int_0^l D(\sigma, s) c(\sigma) f_j(\sigma) d\sigma,$$

und hieraus entnehmen wir wegen (16)

$$M_a f_a = c(s) M_j f_j + \int_0^l E(\sigma, s) f_j(\sigma) d\sigma, \tag{17}$$

wo $E(\sigma, s)$ eine stetig differenzierbare Funktion von σ, s wird.

Multiplizieren wir die zweite der Gleichungen (15) mit $-c(s)$ und addieren sie zur ersten, so folgt mit Rücksicht auf (17) und (14)

$$\begin{aligned} F_a - c F_j &= f_a + c f_j + \int_0^l E(\sigma, s) f_j(\sigma) d\sigma - c\gamma \\ &= 2 c(s) \left\{ f_j + \int_0^l \frac{E(\sigma, s)}{2 c(s)} f_j(\sigma) d\sigma - \frac{\gamma}{2} \right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Da $c(s)$ unserer Annahme zufolge nirgends verschwindet, so stellt

$$K(\sigma, s) = -\frac{E(\sigma, s)}{2 c(s)} \tag{19}$$

eine stetig differenzierbare Funktion von σ, s dar. Wir betrachten die Integralgleichung zweiter Art mit dem komplexen Kern $K(\sigma, s)$

$$\frac{\gamma}{2} = f_j - \int_0^l K(\sigma, s) f_j(\sigma) d\sigma; \tag{20}$$

auf dieselbe sind die Fredholmschen Formeln in gleicher Weise anwendbar, wie wenn der Kern eine reelle Funktion von σ, s wäre, und wir schließen hieraus, daß diese Integralgleichung gewiß eine Lösung

$$f_j(s) = u_j(s) + iv_j(s)$$

besitzen muß, und zwar entweder, indem wir die Konstante γ von Null verschieden setzen oder — falls gerade 1 eine Wurzel der transzendenten zu jener Integralgleichung zweiter Art gehörigen Gleichung, d. h. ein Eigenwert für den Kern $K(\sigma, s)$ wird — indem wir für die Konstante γ den Wert Null setzen. Aus der Tatsache, daß der Kern der Integralgleichung stetig differenzierbar ist, folgt —, wie leicht zu erkennen ist — daß gewiß auch die Lösung der Integralgleichung d. h. die Funktionen $u_j(s), v_j(s)$ stetig differenzierbare Funktionen sind.

Nunmehr bilden wir aus $f_j(s)$ nach (14) den Ausdruck $f_a(s)$ und alsdann nach (15) die Ausdrücke $F_a(s), F_j(s)$. Ergeben sich diese beiden Ausdrücke $F_a(s), F_j(s)$ identisch gleich Null, so zeigen die vorhin gefundenen Resultate (vgl. S. 86 und S. 88), daß die Ausdrücke f_a bzw. f_j die Randwerte einer außerhalb bzw. innerhalb C regulären Funktion der komplexen Veränderlichen darstellen; unsere Aufgabe ist mithin in diesem Falle gelöst.

Ergeben sich nicht beide Ausdrücke $F_a(s), F_j(s)$ identisch gleich Null, so betrachten wir die zu f_j bzw. f_a konjugiert komplexen Ausdrücke $\bar{f}_j$ bzw. $\bar{f}_a$. Nach den oben gefundenen Resultaten (vgl. S. 86 und S. 88) stellen für beliebige w die Ausdrücke

$$w + M_j w \text{ bzw. } w - M_a w$$

stets Randwerte gewisser innerhalb bzw. außerhalb C regulär analytischer Funktionen dar. Nehmen wir für w die komplexen Ausdrücke $\bar{f}_j$ bzw. $\bar{f}_a$, so erkennen wir hieraus, daß gewiß die zu F_j bzw. F_a konjugiert komplexen Ausdrücke $\bar{F}_j$ bzw. $\bar{F}_a$ Randwerte gewisser innerhalb bzw. außerhalb C regulär analytischer Funktionen $g_j(z)$ bzw. $g_a(z)$ sind. Da andererseits unter Vermittlung von (19), (20) aus (18)

$$F_a - cF_j = 0,$$

d. h. wenn $\bar{c}$ den zu c konjugiert komplexen Ausdruck bedeutet,

$$\bar{F}_a = \bar{c}\bar{F}_j$$

folgt, so sind $g_j(z)$, $g_a(z)$ analytische Funktionen der komplexen Variabeln, die die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllen, wenn wir in der für den Rand vorgeschriebenen Relation an Stelle von $c(s)$ den konjugiert imaginären Ausdruck $\bar{c}(s)$ setzen, d. h. unsere Aufgabe ist alsdann bei dieser Modifikation lösbar.

Zusammenfassend sprechen wir das Resultat aus:

Satz 27. *Wenn $c(s)$ ein gegebener komplexer Ausdruck auf der Kurve C ist, so gibt es entweder ein Paar von Funktionen $f_j(z)$, $f_a(z)$, von*

denen die erste innerhalb, die zweite außerhalb der Kurve C regulär analytisch ist, deren Randwerte auf C stetig sind und die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

erfüllen, oder ein Funktionenpaar $g_j(z)$, $g_a(z)$ von demselben Charakter, deren Randwerte auf C stetig sind und die Relation

$$g_a(s) = \bar{c}(s) g_j(s)$$

erfüllen.

Um zu entscheiden, welcher von beiden Fällen eintritt, bedenken wir, daß die Änderung, die $\log f_a(s)$ bzw. $\log f_j(s)$, beim positiven Umlauf entlang der Kurve C erfährt, gleich $-2i\pi n_a$ bzw. $2i\pi n_j$ ist, wo n_a, n_j die Anzahl der Nullstellen der Funktionen $f_a(z)$ bzw. $f_j(z)$ bezeichnen. Demnach ist $-2i\pi(n_a + n_j)$ gleich der Änderung, die

$$\log \frac{f_a(s)}{f_j(s)} = \log c(s)$$

beim Umlauf im positiven Sinne erfährt, und es wird demnach der erste Fall eintreten, wenn die Änderung von $\log c(s)$ beim Umlauf im positiven Sinne entlang C negativ ausfällt, dagegen tritt der zweite Fall ein, wenn jene Änderung positiv ausfällt.

Ist insbesondere jene Änderung von $\log c(s)$ gleich Null, so existiert sowohl ein Paar außerhalb bzw. innerhalb C holomorpher Funktionen $f_a(z), f_j(z)$, die die Relation

(21) $$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

erfüllen, als auch ein Funktionenpaar $g_a(z), g_j(z)$ von diesem Charakter mit der Relation

(22) $$g_a(s) = \bar{c}(s) g_j(s).$$

Um dies einzusehen, bedenken wir, daß nach dem vorhin bewiesenen Satze jedenfalls ein Funktionenpaar $F_a(z)$, $F_j(z)$ existieren muß, das die Relation

$$F_a(s) = c(s)\bar{c}(s) F_i(s)$$

erfüllt, da ja $c(s)\bar{c}(s)$ mit dem konjugierten Ausdrucke übereinstimmt. Ist nun etwa die Gleichung (21) lösbar, so ist wegen unserer Annahme über $c(s)$ notwendig die Anzahl $n_a + n_j = 0$, d. h. $f_a(z), f_j(z)$ besitzen keine Nullstellen, und folglich sind

$$g_a(z) = \frac{F_a(z)}{f_a(z)}, \quad g_j(z) = \frac{F_j(z)}{f_j(z)}$$

ebenfalls regulär analytische Funktionen; dieselben befriedigen die Relation (22).

Die Funktionenpaare $f_a(z), f_j(z)$ und $g_a(z), g_j(z)$ sind, wie man überdies sofort sieht, im eben betrachteten besonderen Falle bis auf je einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Die gleiche Überlegung dient zum Nachweise, daß es stets bei beliebig gegebenem $c(s)$ ein Paar von Funktionen $f_a(z), f_j(z)$ gibt, von denen die erste außerhalb C, die zweite innerhalb C den Charakter einer rationalen Funktion hat, während auf C die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

erfüllt ist.

Wenn $\gamma(s) = \log c(s)$ eine eindeutige Funktion von s wird, so gelangen wir durch Logarithmierung zu der Aufgabe, ein Paar von Funktionen $f_a(z), f_j(z)$ zu finden, von denen die erstere außerhalb C, die letztere innerhalb C regulär analytisch ist und für die die Differenz ihrer Randwerte auf C einem gegebenen komplexen Ausdrucke $\gamma(s)$ gleich wird. Wie wir sehen, hat diese Aufgabe stets eine Lösung. Im Falle die Kurve C ein Kreis ist, läßt sich die Lösung auch durch die Entwicklung von $\gamma(s)$ in eine trigonometrische Reihe ableiten.

Es bedarf endlich noch der Umstand einer näheren Untersuchung, daß die Funktion $c(s)$ an einer endlichen Anzahl von Stellen eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit aufweist.

Wir fassen zunächst einen Punkt der Kurve C ins Auge; derselbe sei der Koordinatenanfang und zugleich der Anfangspunkt für die Abmessung der Bogenlänge s. Da die Kurve C keine Ecke besitzt, so erhalten wir die Punkte auf C in der Umgebung des Koordinatenanfangs für genügend kleine positive oder negative Werte von s durch die Formel

$$z(s) = C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3 + \cdots \tag{23}$$

dargestellt, wo rechter Hand eine Potenzreihe steht, deren erster Koeffizient C_1 von Null verschieden ausfällt.

Alsdann handelt es sich zunächst darum, irgendeine innerhalb C nirgends verschwindende, regulär analytische Funktion $f_j^*(z)$ und irgendeine außerhalb C nirgends verschwindende, regulär analytische Funktion $f_a^*(z)$ zu bestimmen, so daß der Quotient der Randwerte dieser beiden Hilfsfunktionen auf C

$$\mathfrak{Q}(s) = \frac{f_a^*(s)}{f_j^*(s)}$$

in der Umgebung von $z = 0$ den folgenden Bedingungen genügt: $\mathfrak{Q}(s)$ soll für genügend kleine positive s durch eine nach Potenzen von s fortschreitende Reihe $\mathfrak{Q}_+(s)$ und für genügend kleine negative s durch eine andere nach Potenzen von s fortschreitende Reihe $\mathfrak{Q}_-(s)$ darstellbar sein derart, daß der Quotient dieser beiden Potenzreihen die Kongruenz

$$\frac{\mathfrak{Q}_+(s)}{\mathfrak{Q}_-(s)} \equiv q_0 + q_1 s + q_2 s^2, \ (s^2) \tag{24}$$

erfüllt; dabei sind q_0, q_1, q_2 gegebene komplexe Konstante, $q_0 \neq 0$, und diese Kongruenz bedeutet, daß

$$\frac{\mathfrak{Q}_+(s)}{\mathfrak{Q}_-(s)} - (q_0 + q_1 s + q_2 s^2)$$

eine durch s^3 teilbare Potenzreihe werden soll.

Um die Bestimmung solcher Funktionen $f_j^*(z), f_a^*(z)$ zu ermöglichen, betrachten wir die Funktion

$$\varphi_j(z) = \log(z)$$

innerhalb der Kurve C; die Werte derselben in der Umgebung von $z = 0$ auf C stellen sich, wie folgt, dar:

$$\begin{aligned} \varphi_j(s) &= -i\pi + l(s) + J_0 + J_1 s + J_2 s^2 + \cdots, \ (s > 0), \\ &= \qquad l(-s) + J_0 + J_1 s + J_2 s^2 + \cdots, \ (s < 0), \end{aligned}$$

wo $l(s)$, $l(-s)$ die reellen Logarithmen und J_0, J_1, J_2, ... gewisse komplexe Koeffizienten bedeuten. Ferner betrachten wir außerhalb der Kurve C die Funktion

$$\varphi_a(z) = \log\left(\frac{z}{z - p_j}\right),$$

wo p_j einen innerhalb C gelegenen Punkt bedeutet; die Werte dieser Funktion in der Umgebung von $z = 0$ auf C stellen sich, wie folgt, dar:

$$\begin{aligned} \varphi_a(s) &= i\pi + l(s) + A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \cdots, \ (s > 0), \\ &= \quad l(-s) + A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \cdots, \ (s < 0), \end{aligned}$$

wo $l(s)$, $l(-s)$ wiederum die reellen Logarithmen und A_0, A_1, A_2, ... gewisse komplexe Koeffizienten bedeuten.

Nunmehr bestimmen wir die ganze rationale Funktion $K_a(z)$ vom zweiten Grade in der komplexen Veränderlichen z derart, daß vermöge (23)

(25) $$\frac{K_a(z(s))}{(z(s) - p_j)^2} \equiv \frac{1}{2i\pi}\, l(q_0 + q_1 s + q_2 s^2), \ (s^3)$$

wird, und ferner die ganze rationale Funktion $K_j(z)$ zweiten Grades in der komplexen Veränderlichen z derart, daß vermöge (23)

(26) $$K_j(z(s)) \equiv \frac{1}{2i\pi}\, l(q_0 + q_1 s + q_2 s^2), \ (s^3)$$

wird.

Setzen wir nunmehr

$$f_j^*(z) = e^{K_j(z)\varphi_j(z)},$$

$$f_a^*(z) = e^{\frac{K_a(z)}{(z - p_j)^2}\varphi_a(z)},$$

so erfüllen diese Funktionen der komplexen Veränderlichen z alle verlangten Bedingungen. In der Tat haben wir auf C in der Umgebung von $z = 0$

$$\varphi_a(s) - \varphi_j(s) = 2i\pi + (A_0 - J_0) + (A_1 - J_1)s + (A_2 - J_2)s^2 + \cdots \ (s > 0)$$
$$= \qquad (A_0 - J_0) + (A_1 - J_1)s + (A_2 - J_2)s^2 + \cdots \ (s < 0);$$

folglich gilt mit Rücksicht auf (25) und (26) auch die Kongruenz (24).

Die gefundenen Funktionen $f_j^*(z), f_a^*(z)$ sind, wie man sieht, auch auf der Kurve C, vom Punkte $s = 0$ abgesehen, regulär analytisch.

Es sei nun in dem vorgelegten, oben behandelten Problem $c(s)$ ein komplexer Ausdruck, der an einer Stelle, etwa für $s = 0$, eine Unterbrechung seiner Stetigkeit bzw. stetigen Differenzierbarkeit erleidet derart, daß die Darstellung der Werte von $c(s)$ in der Umgebung von $s = 0$ durch zwei voneinander verschiedene Potenzreihen $\mathfrak{P}_+(s)$ und $\mathfrak{P}_-(s)$ bewirkt wird, je nachdem $s > 0$ oder $s < 0$ ist. Alsdann bestimmen wir drei Konstante q_0, q_1, q_2 aus der Kongruenz

$$q_0 + q_1 s + q_2 s^2 \equiv \frac{\mathfrak{P}_+(s)}{\mathfrak{P}_-(s)} \tag{27}$$

und bilden dann in der eben angegebenen Weise zu diesen Konstanten q_0, q_1, q_2 die analytischen Funktionen $f_a^*(z), f_j^*(z)$, so daß deren Randwertquotient $\mathfrak{Q}(s)$ die Kongruenz (24) erfüllt und folglich mit Rücksicht auf (27) auch

$$\frac{\mathfrak{Q}_+(s)}{\mathfrak{Q}_-(s)} \equiv \frac{\mathfrak{P}_+(s)}{\mathfrak{P}_-(s)}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{P}_-(s)}{\mathfrak{Q}_-(s)} \equiv \frac{\mathfrak{P}_+(s)}{\mathfrak{Q}_+(s)} \tag{28}$$

wird. Setzen wir

$$C(s) = \frac{c(s)}{\mathfrak{Q}(s)},$$

so lehrt (28), daß $C(s)$ auch für $s = 0$ zweimal stetig differenzierbar wird; mithin ist nach dem Früheren das Problem, eine innerhalb und eine außerhalb der Kurve C reguläre Funktion $F_a(z)$ bzw. $F_j(z)$ mit der Randbedingung

$$F_a(s) = C(s) F_j(s)$$

zu finden, lösbar; wegen

$$f_a^*(s) = \mathfrak{Q}(s) f_j^*(s)$$

erfüllen die Funktionen

$$f_a(z) = F_a(z) f_a^*(z), \quad f_j(z) = F_j(z) f_j^*(z)$$

die Randbedingung

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

und lösen daher unser vorgelegtes Problem.

Die Aufgabe, die wir nunmehr in Angriff nehmen, besteht darin, zwei außerhalb der geschlossenen Kurve C regulär analytische Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$ und zwei innerhalb C regulär analytische bzw. sich wie

rationale Funktionen verhaltende Funktionen $f_j(z)$, $f_j'(z)$ zu finden, so daß die Randwerte dieser beiden Funktionenpaare auf der Kurve C selbst eine gegebene lineare Transformation mit komplexen Koeffizienten erfahren, d. h. daß

$$(29)\qquad \begin{cases} f_a(s) = c_1(s) f_j(s) + c_2(s) f_j'(s), \\ f_a'(s) = c_1'(s) f_j(s) + c_2'(s) f_j'(s) \end{cases}$$

wird, wo $c_1(s)$, $c_2(s)$, $c_1'(s)$, $c_2'(s)$ gegebene komplexe, zweimal stetig differenzierbare Ausdrücke in s sind, deren Determinante

$$c_1(s) c_2'(s) - c_2(s) c_1'(s)$$

für alle s von Null verschieden bleibt. Die Kurve C werde der Einfachheit halber wiederum analytisch vorausgesetzt.

Zur Lösung der Aufgabe setzen wir, indem wir der Kürze halber das Argument s fortlassen:

$$(30)\qquad \begin{cases} F_a = f_a + M_a f_a, & F_a' = f_a' + M_a f_a' \\ F_j = -f_j + M_j f_j + \gamma, & F_j' = -f_j' + M_j f_j', \end{cases}$$

wo γ eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet, und ferner

$$(31)\qquad \begin{cases} c_1(\sigma) = c_1(s) + c_1(\sigma, s) \sin \frac{\pi}{l}(s - \sigma), \\ c_2(\sigma) = c_2(s) + c_2(\sigma, s) \sin \frac{\pi}{l}(s - \sigma), \\ c_1'(\sigma) = c_1'(s) + c_1'(\sigma, s) \sin \frac{\pi}{l}(s - \sigma), \\ c_2'(\sigma) = c_2'(s) + c_2'(\sigma, s) \sin \frac{\pi}{l}(s - \sigma), \end{cases}$$

wo nun die Funktionen $c_1(\sigma, s)$, $c_2(\sigma, s)$, $c_1'(\sigma, s)$, $c_2'(\sigma, s)$ gewiß für alle Argumente σ, s einmal stetig differenzierbar nach diesen Argumenten sind.

Wenden wir auf (29), indem wir uns die Randwerte f_a, f_a', f_j, f_j' als stetig differenzierbare Funktionen von s denken, die Operation M_a an, so entsteht mit Rücksicht auf (13) und (31)

$$(32)\qquad \begin{cases} M_a f_a = c_1 M_j f_j + c_2 M_j f_j' + \int_0^l (E_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2(\sigma, s) f_j'(\sigma))\, d\sigma, \\ M_a f_a' = c_1' M_j f_j + c_2' M_j f_j' + \int_0^l (E_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma))\, d\sigma, \end{cases}$$

wo $E_1(\sigma, s)$, $E_2(\sigma, s)$, $E_1'(\sigma, s)$, $E_2'(\sigma, s)$ stetig differenzierbare Funktionen von σ, s sind und das Argument s wiederum der Kürze halber weggelassen worden ist.

Multiplizieren wir die in der unteren Zeile von (30) stehenden zwei Gleichungen einmal mit $-c_1$, $-c_2$ und ein anderes Mal mit $-c_1'$, $-c_2'$ und addieren sie das erste Mal zu der ersten und das zweite Mal zu der

zweiten der darüber stehenden Gleichungen, so ergibt sich mit Rücksicht auf (32)

$$F_a - c_1 F_j - c_2 F_j' = f_a + c_1 f_j + c_2 f_j' + \int_0^l (E_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma - c_1 \gamma,$$

$$F_a' - c_1' F_j - c_2' F_j' = f_a' + c_1' f_j + c_2' f_j' + \int_0^l (E_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma - c_1' \gamma,$$

und mit Hilfe von (29)

$$(33) \quad \begin{cases} F_a - c_1 F_j - c_2 F_j' = 2(c_1 f_j + c_2 f_j') + \int_0^l (E_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma - c_1 \gamma, \\ F_a' - c_1' F_j - c_2' F_j' = 2(c_1' f_j + c_2' f_j') + \int_0^l (E_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + E_2'(\sigma) f_j'(\sigma, s)) d\sigma - c_1' \gamma. \end{cases}$$

Setzen wir die rechten Seiten dieser beiden letzten Formeln gleich Null, so erhalten wir durch Kombination der so entstehenden Gleichungen — da ja die Determinante $c_1 c_2' - c_2 c_1'$ unserer Annahme zufolge für keinen Wert von s verschwindet — Gleichungen von der Form

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{\gamma}{2} = f_j - \int_0^l (K_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + K_2(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma, \\ 0 = f_j' - \int_0^l (K_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + K_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma, \end{cases}$$

wo $K_1(\sigma, s)$, $K_2(\sigma, s)$, $K_1'(\sigma, s)$, $K_2'(\sigma, s)$ ebenfalls stetig differenzierbare Funktionen von σ, s sind. Diese Gleichungen lassen sich in eine einzige Integralgleichung zweiter Art

$$(35) \qquad \gamma(s) = \varphi(s) - \int_0^{2l} K(\sigma, s) \varphi(\sigma) d\sigma$$

zusammenfassen, indem wir die Funktionen $\gamma(s)$, $\varphi(s)$, $K(\sigma, s)$, wie folgt definieren:

$$\gamma(s) = \frac{\gamma}{2}, \quad 0 \leqq s \leqq l$$
$$= 0, \quad l < s \leqq 2l;$$
$$\varphi(s) = f_j(s), \quad 0 \leqq s \leqq l$$
$$= f_j'(s - l), \quad l < s \leqq 2l;$$
$$K(\sigma, s) = K_1(\sigma, s), \quad \begin{cases} 0 \leqq s \leqq l \\ 0 \leqq \sigma \leqq l \end{cases}$$
$$= K_2(\sigma - l, s), \quad \begin{cases} 0 \leqq s \leqq l \\ l < \sigma \leqq 2l \end{cases}$$

$$= K_1'(\sigma, s - l), \quad \begin{cases} l < s \leqq 2l \\ 0 \leqq \sigma \leqq l \end{cases}$$

$$= K_2'(\sigma - l, s - l), \quad \begin{cases} l < s \leqq 2l \\ l < \sigma \leqq 2l. \end{cases}$$

Die Anwendung der Fredholmschen Formeln zeigt, daß die Integralgleichung (35) stets eine Lösung $\varphi(s)$ besitzen muß, und zwar entweder, indem wir der Konstanten γ irgendeinen von Null verschiedenen Wert erteilen oder — falls gerade 1 ein Eigenwert für den Kern $K(\sigma, s)$ wird — indem wir für die Konstante γ den Wert Null wählen, wodurch die Integralgleichung zu einer homogenen wird. Diese Lösung $\varphi(s)$ liefert die Lösungen $f_j(s), f_j'(s)$ der Gleichungen (34), und die so gewonnenen Funktionen $f_j(s), f_j'(s)$ sind gewiß ebenfalls stetig differenzierbar — wie aus der stetigen Differenzierbarkeit der Funktionen $K_1(\sigma, s)$, $K_2(\sigma, s)$, $K_1'(\sigma, s)$, $K_2'(\sigma, s)$ sofort zu erkennen ist, indem man allgemein zeigt, daß Integrale von der Gestalt

$$\int_0^l K^*(\sigma, s)\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

gewiß notwendig stetig differenzierbare Funktionen von s darstellen, sobald $\varphi(\sigma)$ stetig in σ und $K^*(\sigma, s)$ stetig differenzierbar in bezug auf beide Variable σ, s ist.

Nunmehr bilden wir aus $f_j(s), f_j'(s)$ nach (29) die Ausdrücke $f_a(s), f_a'(s)$ und alsdann nach (30) die Ausdrücke $F_a(s)$, $F_a'(s)$, $F_j(s)$, $F_j'(s)$. Ergeben sich diese vier Ausdrücke $F_a(s)$, $F_a'(s)$, $F_j(s)$, $F_j'(s)$ sämtlich identisch gleich Null, so zeigen unsere obigen Resultate (vgl. S. 86 und S. 88), daß die Ausdrücke f_a, f_a' und f_j, f_j' die Randwerte außerhalb bzw. innerhalb C regulärer analytischer Funktionen der komplexen Veränderlichen darstellen; unsere Aufgabe ist mithin in diesem Falle gelöst.

Ergeben sich nicht alle vier Ausdrücke $F_a(s)$, $F_a'(s)$, $F_j(s)$, $F_j'(s)$ identisch gleich Null, so betrachten wir die zu f_j, f_j' und f_a, f_a' konjugiert komplexen Ausdrücke $\bar{f}_j, \bar{f}_j'$ bzw. $\bar{f}_a, \bar{f}_a'$. Nach den oben gefundenen Resultaten (vgl. S. 86 und S. 88) stellen für beliebige w die Ausdrücke

$$w + M_j w \text{ bzw. } w - M_a w$$

stets Randwerte gewisser innerhalb bzw. außerhalb C regulärer analytischer Funktionen dar. Nehmen wir für w die komplexen Ausdrücke $\bar{f}_j, \bar{f}_j'$ bzw. $\bar{f}_a, \bar{f}_a$, so erkennen wir hieraus, daß gewiß die zu F_j, F_j' bzw. F_a, F_a' konjugiert komplexen Ausdrücke $\bar{F}_j$, $\bar{F}_j'$, $\bar{F}_a$, $\bar{F}_a'$ Randwerte gewisser innerhalb bzw. außerhalb C regulärer analytischer Funktionen $g_j(z)$, $g_j'(z)$ bzw. $g_a(z), g_a'(z)$ sind. Da andererseits unter Vermittlung von (32), (34) aus (33) offenbar

$$F_a = c_1 F_j + c_2 F_j',$$
$$F_a' = c_1' F_j + c_2' F_j'$$

folgt und mithin, wenn $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_1'$, $\bar{c}_2'$ die zu c_1, c_2, c_1', c_2' konjugiert komplexen Ausdrücke bedeuten, auch

$$\bar{F}_a = \bar{c}_1 \bar{F}_j + \bar{c}_2 \bar{F}_j',$$
$$\bar{F}_a' = \bar{c}_1' \bar{F}_j' + \bar{c}_2' \bar{F}_j'$$

wird, so sind offenbar $g_j(z)$, $g_j'(z)$, $g_a(z)$, $g_a'(z)$ analytische und auf C gewiß stetige Funktionen der komplexen Variabeln z, die die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllen, wenn wir in den für den Rand vorgeschriebenen linearen Relationen an Stelle der Koeffizienten c_1, c_2, c_1', c_2' die konjugiert komplexen Ausdrücke $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_1'$, $\bar{c}_2'$ setzen, d. h. unsere Aufgabe ist alsdann bei dieser Modifikation gewiß lösbar.

Zusammenfassend sprechen wir das Resultat aus:

Satz 28. *Wenn c_1, c_2, c_1', c_2' gegebene komplexe zweimal stetig differenzierbare Ausdrücke auf der Kurve C sind, so gibt es entweder zwei Funktionenpaare $f_j(z)$, $f_j'(z)$ und $f_a(z)$, $f_a'(z)$, von denen die ersteren innerhalb, die letzteren außerhalb der Kurve C regulär analytisch sind, deren Randwerte auf C stetig sind und die Relationen*

$$f_a = c_1 f_j + c_2 f_j',$$
$$f_a' = c_1' f_j + c_2' f_j'$$

erfüllen, oder zwei Funktionenpaare ebenfalls von regulärem Charakter innerhalb bzw. außerhalb C: $g_j(z)$, $g_j'(z)$ und $g_a(z)$, $g_a'(z)$, deren Randwerte auf C stetig sind und die Relationen

$$g_a = \bar{c}_1 g_j + \bar{c}_2 g_j',$$
$$g_a' = \bar{c}_1' g_j + \bar{c}_2' g_j'$$

erfüllen, wo $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2'$, $\bar{c}_1'$, $\bar{c}_2'$ die zu den gegebenen Ausdrücken c_1, c_2, c_1', c_2' bzw. konjugiert komplexen Ausdrücke bedeuten.

Wir fügen diesem Resultate noch folgende Bemerkungen hinzu.

Es seien $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$ außerhalb bzw. innerhalb von C stetig differenzierbare Funktionen, deren Randwerte auf C stetig differenzierbare Funktionen von s seien und den Bedingungen (29) genügen mögen: dann gelten, wie vorhin gezeigt, für die Randwerte f_a, f_a', f_j, f_j' die Gleichungen (32). Ferner ist unseren früheren Ausführungen (vgl. S. 86 bis S. 88) zufolge

$$f_a + M_a f_a - \frac{1}{l}\int_0^l f_a(\sigma)\,d\sigma = 0, \quad f_a' + M_a f_a' - \frac{1}{l}\int_0^l f_a'(\sigma)\,d\sigma = 0,$$

$$f_j - M_j f_j - \frac{1}{l}\int_0^l f_j(\sigma)\,d\sigma = 0, \quad f_j' - M_j f_j' - \frac{1}{l}\int_0^l f_j'(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

Multiplizieren wir hier die in der unteren Zeile stehenden zwei Gleichungen einmal mit c_1, c_2 und ein anderes Mal mit c_1', c_2' und addieren sie das erste Mal zu der ersten und das zweite Mal zu der zweiten der darüber stehenden Gleichungen, so gelangen wir mit Rücksicht auf (32) und bei Benutzung von (29) zu Gleichungen der Gestalt

$$2(c_1 f_j + c_2 f_j') + \int_0^l (G_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + G_2(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma = 0,$$

$$2(c_1' f_j + c_2' f_j') + \int_0^l (G_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + G_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma = 0;$$

und durch deren Kombination entstehen die Integralgleichungen:

$$(36)\quad \begin{cases} f_j - \int_0^l (L_1(\sigma, s) f_j(\sigma) + L_2(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma = 0, \\ f_j' - \int_0^l (L_1'(\sigma, s) f_j(\sigma) + L_2'(\sigma, s) f_j'(\sigma)) d\sigma = 0; \end{cases}$$

dabei sind $G_1(\sigma, s)$, $G_2(\sigma, s)$, $G_1'(\sigma, s)$ $G_2'(\sigma, s)$ und mithin auch $L_1(\sigma, s)$, $L_2(\sigma, s)$, $L_1'(\sigma, s)$, $L_2'(\sigma, s)$ stetig differenzierbare Funktionen von σ, s. Die Integralgleichungen (36) lassen sich wieder in analoger Weise wie früher die Integralgleichungen (34) in eine homogene Integralgleichung zweiter Art zusammenfassen, wenn wir wie dort an Stelle der Funktionen f_j, f_j' eine Funktion $\varphi(s)$ einführen. Da aber eine Integralgleichung zweiter Art gewiß nur eine endliche Anzahl linear von einander unabhängiger Lösungen besitzt, so folgt, daß es auch nur eine *endliche* Anzahl von Funktionenpaaren f_j, f_j' und zugehörigen f_a, f_a' von der in Rede stehenden Beschaffenheit geben kann.

Setzen wir von den Randwerten f_a, f_a', f_j f_j' der analytischen Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$ nicht die stetige Differenzierbarkeit, sondern nur Stetigkeit in s voraus, so können wir diese Randwerte f_a, f_a', f_j, f_j doch stets durch gewisse Ausdrücke $f_a^{(r)}$, $f_a'^{(r)}$, $f_j^{(r)}$, $f_j'^{(r)}$ in s gleichmäßig annähern, welche die Randwerte von analytischen außerhalb und auf C bzw. innerhalb und auf C regulären Funktionen in z sind und welche daher in s analytisch ausfallen.

Um dies etwa für die Randwerte f_j, f_j' einzusehen, seien

$$Z = \Phi(z) \quad \text{oder} \quad z = \varphi(Z)$$

die analytischen Beziehungen zwischen den komplexen Veränderlichen z, Z, vermöge derer das Innere der Kurve C in der komplexen z-Ebene auf das Innere des Einheitskreises in der komplexen Z-Ebene konform abgebildet wird. Alsdann stellen für $r < 1$ die Ausdrücke

$$f_j(\varphi(r\,\Phi(z))), \quad f_j'(\varphi(r\,\Phi(z)))$$

innerhalb und auf C regulär analytische Funktionen von z dar, deren Randwerte auf C

$$f_j^{(r)} = f_j(\varphi(r\,\Phi(s))), \quad f_j'^{(r)} = f_j'(\varphi(r\,\Phi(s)))$$

beim Grenzübergange zu $r = 1$ gleichmäßig gegen die Randwerte f_j, f_j' konvergieren.

Entsprechend gelangen wir für die Randwerte f_a, f_a' zu gleichmäßig annähernden Randwerten $f_a^{(r)}$, $f_a'^{(r)}$ von der gewünschten Art.

Bestimmen wir nun vier Funktionen $c_1^{(r)}$, $c_2^{(r)}$, $c_1'^{(r)}$, $c_2'^{(r)}$ auf C, die noch von dem Parameter r abhängen und für $r = 1$ bzw. in c_1, c_2, c_1', c_2' übergehen, während für alle r die Relationen

$$f_a^{(r)} = c_1^{(r)} f_j^{(r)} + c_1^{(r)} f_j'^{(r)},$$
$$f_a'^{(r)} = c_1'^{(r)} f_j^{(r)} + c_2'^{(r)} f_j'^{(r)}$$

gelten, so müssen unserer obigen Überlegung zufolge die Werte $f_j^{(r)}$, $f_j'^{(r)}$ gewisse entsprechende Integralgleichungen von der Gestalt (36) erfüllen, die für $r = 1$ in die Integralgleichungen (36) übergehen. Hieraus erkennen wir, daß die Funktionen f_j, f_j' die Integralgleichungen (36) befriedigen, und erschließen so ihre stetige Differenzierbarkeit.

Wir fassen diese Bemerkungen in folgendem Satze zusammen:

Satz 29. *Wenn $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$ außerhalb bzw. innerhalb C regulär analytische Funktionen von z und ihre Randwerte auf C stetige, den Relationen* (29) *genügende Funktionen von s sind, so sind diese Randwerte auf C notwendig auch stetig differenzierbare Funktionen von s.*

Es gibt gar keine oder nur eine endliche Anzahl linear voneinander unabhängiger Systeme von Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$, die außerhalb bzw. innerhalb C regulär analytisch sind und auf C stetige, den Relationen (29) *genügende Randwerte besitzen.* —

Wir wenden uns nun zu der Frage, ob es stets Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$ mit stetigen und den Relationen (29) genügenden Randwerten auf C gibt, wenn wir von $f_a(z)$, $f_a'(z)$ wiederum regulär analytischen Charakter außerhalb C, dagegen von den Funktionen $f_j(z)$, $f_j'(z)$ nur verlangen, daß sie innerhalb C den Charakter rationaler Funktionen besitzen.

Um diese Frage zu beantworten, fassen wir diejenigen Systeme von Funktionen $g_a(z)$, $g_a'(z)$, $g_j(z)$, $g_j'(z)$ ins Auge, die außerhalb bzw. innerhalb C regulär analytischen Charakter besitzen, deren Randwerte auf C stetig sind und den Relationen

$$(37) \qquad \begin{cases} g_a = \bar{c}_1' g_j + \bar{c}_2 g_j', \\ g_a' = \bar{c}_1 g_j + \bar{c}_2' g_j' \end{cases}$$

genügen, wo $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_1'$, $\bar{c}_2'$ die zu den gegebenen Ausdrücken bzw. c_1, c_2, c_1', c_2' konjugiert imaginären Ausdrücke bedeuten. Nach dem eben

bewiesenen Satze gibt es nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Funktionensysteme solcher Art, und deswegen fällt es uns leicht, wenn $z = p_j$ einen irgendwie gegebenen Punkt innerhalb C bedeutet, eine ganze positive Zahl n zu finden, so daß gewiß kein Funktionensystem $g_a(z)$, $g_a'(z)$, $g_j(z)$, $g_j'(z)$ der in Rede stehenden Art existiert, wobei die Funktionen $g_j(z)$, $g_j'(z)$ im Punkte $z = p_j$ von der $n$ten Ordnung Null sind.

Bezeichnen wir nun die Randwerte der Funktion $(z - p_j)^n$ auf C mit $\tilde{\omega}$, so gibt es sicherlich kein System von Funktionen $g_a^*(z)$, $g_a'^*(z)$, $g_j^*(z)$, $g_j'^*(z)$, die außerhalb bzw. innerhalb C regulär analytisch sind und stetige, den Relationen

$$g_a^* = \bar{c}_1 \tilde{\omega} g_j^* + \bar{c}_2 \tilde{\omega} g_j'^*,$$
$$g_a'^* = \bar{c}_1' \tilde{\omega} g_j^* + \bar{c}_2' \tilde{\omega} g_j'^*$$

genügende Randwerte auf C besitzen; denn andernfalls wären

$$g_a(z) = g_a^*(z), \quad g_a'(z) = g_a'^*(z)$$
$$g_j(z) = (z - p_j)^n g_j^*(z), \quad g_j'(z) = (z - p_j)^n g_j'^*(z)$$

regulär analytische Funktionen, deren Randwerte den Relationen (37) genügen und von denen $g_j(z)$, $g_j'(z)$ im Punkte $z = p_j$ eine Nullstelle $n$ter Ordnung besitzen, was nicht der Fall sein sollte.

Auf Grund der eben festgestellten Tatsache schließen wir wegen Satz 28, daß es gewiß ein System von Funktionen $f_a^*(z)$, $f_a'^*(z)$, $f_j^*(z)$, $f_j'^*(z)$ geben muß, die außerhalb bzw. innerhalb C sich regulär analytisch verhalten und stetige, den Relationen

$$f_a^* = c_1 \bar{\tilde{\omega}} f_j^* + c_2 \bar{\tilde{\omega}} f_j'^*,$$
$$f_a'^* = c_1 \bar{\tilde{\omega}} f_j^* + c_2' \bar{\tilde{\omega}} f_j'^*$$

genügende Randwerte auf C besitzen, wobei $\bar{\tilde{\omega}}$ den zu $\tilde{\omega}$ konjugiert komplexen Ausdruck auf C bedeutet.

Nunmehr bestimmen wir — was unseren Ausführungen auf S. 91 zufolge möglich ist — eine außerhalb C und eine innerhalb C regulär analytische Funktion $\psi_a(z)$ bzw. $\psi_j(z)$, deren Randwerte auf C stetig sind und der Relation

$$\psi_a = \frac{1}{\tilde{\omega}\bar{\tilde{\omega}}} \psi_j$$

genügen. Dann sind offenbar

$$f_a(z) = \psi_a(z) f_a^*(z), \qquad f_a'(z) = \psi_a(z) f_a'^*(z)$$
$$f_j(z) = \frac{\psi_j(z)}{(z - p_j)^n} f_j^*(z), \qquad f_j'(z) = \frac{\psi_j(z)}{(z - p_j)^n} f_j'^*(z)$$

Funktionen der verlangten Art mit stetigen und den Relationen (29) genügenden Randwerten auf C.

Wir sprechen daher den Satz aus:

Satz 30: *Es gibt stets Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$, $f_j(z)$, $f_j'(z)$ der komplexen Variabeln z, die auf der Kurve C stetige, den Relationen* (29) *genügende Randwerte besitzen und die außerhalb bzw. innerhalb C von regulär analytischem Charakter sind — mit etwaiger Ausnahme einer Stelle innerhalb C, die für eine der Funktionen $f_j(z)$, $f_j'(z)$ oder für beide ein Pol ist.*

Zum Schluß mache ich von dem eben bewiesenen Satze eine Anwendung auf den Beweis für die Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe, d. h. auf die Lösung des besonderen der Theorie der linearen Differentialgleichungen entsprungenen Riemannschen Problems[1]). Zu dem Zwecke verbinde ich die gegebenen singulären Punkte $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots z^{(m)}$ der linearen Differentialgleichung in der komplexen z-Ebene in dieser Folge zyklisch mittels einer geschlossenen analytischen Kurve C: es kommt dann darauf an — wir haben der Einfachheit halber den Fall einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Sinn[2]) —, ein Paar von Funktionen $f(z)$, $f'(z)$ zu konstruieren, die sich überall in der Ebene, insbesondere auch auf dem zwischen $z^{(m)}$ und $z^{(1)} = z^{(m+1)}$ verlaufenden Stücke der Kurve C wie rationale Funktionen der komplexen Veränderlichen z verhalten und nur in den zwischen $z^{(1)}$ und $z^{(2)}$, $z^{(2)}$ und $z^{(3)}, \ldots, z^{(m-1)}$ und $z^{(m)}$ verlaufenden Kurvenstücken ein singuläres Verhalten zeigen, insofern ihre Werte auf der äußeren Seite dieser Kurvenstücke aus den Werten auf der inneren Seite durch lineare homogene Kombinationen mit gegebenen konstanten Koeffizienten abzuleiten sind. Bezeichnen wir die Funktionen $f(z)$, $f'(z)$ innerhalb bzw. außerhalb C mit $f_j(z)$, $f_j'(z)$ bzw. $f_a(z)$, $f_a'(z)$ und bedenken, daß die für das Kurvenstück zwischen $z^{(m)}$ und $z^{(1)}$ geltende Forderung

---

1) Diesen Gedanken zur Lösung des besonderen Riemannschen Problems hat der Verfasser bereits in Vorlesungen über Integralgleichungen (Wintersemester 1901/02) entwickelt; O. Kellogg hat ihn dann in einer Note („Unstetigkeiten bei den linearen Integralgleichungen mit Anwendung auf ein Problem von Riemann", Math. Ann. Bd. 60) auszuführen gesucht. — Kürzlich hat L. Schlesinger („Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das Riemannsche Problem", Journ. für Math., Bd. 130 und Math. Ann., 63) die Kontinuitätsmethode zum Beweise für die Lösbarkeit des besonderen Riemannschen Problems heranzuziehen gesucht. — Man vgl. ferner die Abhandlung von Plemelj „Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe", Monatshefte für Math. und Phys. XIX., wo eine vereinfachte Darstellung meiner Lösung des speziellen Riemannschen Problems gegeben wird.

2) Für den Kenner der Determinantentheorie gilt dann die Schlußweise zugleich für den Fall einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung.

$$f_a = f_j,$$
$$f_a' = f_j'$$

der identischen Substitution gleich kommt, so gelangen wir zu der folgenden Aufgabe:

Man soll außerhalb der Kurve C die Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$ und innerhalb C die Funktionen $f_j(z)$, $f_j'(z)$ vom Charakter rationaler Funktionen derart bestimmen, daß die Randwerte f_a, f_a', f_j, f_j' dieser Funktionen auf C überall stetig sind und bzw. für die Kurvenstücke

zwischen $z^{(h)}$ und $z^{(h+1)}$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$

die Relationen

(38)
$$\begin{cases} f_a = \gamma_1^{(h)} f_j + \gamma_2^{(h)} f_j', \\ f_a' = \gamma_1'^{(h)} f_j + \gamma_2'^{(h)} f_j' \end{cases} \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

erfüllen, wobei

$$\gamma_1^{(h)}, \; \gamma_2^{(h)}, \; \gamma_1'^{(h)}, \; \gamma_2'^{(h)} \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

gegebene Konstanten mit nicht verschwindender Determinante sind. Der doppelten Schreibweise des Punktes

$$z^{(m+1)} = z^{(1)}$$

entsprechend werde noch

$$\gamma_1^{(m+1)} = \gamma_1^{(1)}, \quad \gamma_2^{(m+1)} = \gamma_2^{(1)}, \quad \gamma_1'^{(m+1)} = \gamma_1'^{(1)}, \quad \gamma_2'^{(m+1)} = \gamma_2'^{(1)}$$

gesetzt.

Zur Lösung dieser Aufgabe setzen wir zunächst

(39)
$$\begin{cases} f_a^* = \gamma_1^{(h-1)} f_j + \gamma_2^{(h-1)} f_j' \\ f_a'^* = \gamma_1'^{(h-1)} f_j + \gamma_2'^{(h-1)} f_j', \end{cases}$$

wo f_a^*, $f_a'^*$ Hilfsausdrücke in s sind, berechnen hieraus die Werte von f_j, f_j' und führen dieselben rechter Hand in (38) ein. Die so aus (38) und (39) entstehende Substitution

$$f_a = \Gamma_1^{(h)} f_a^* + \Gamma_2^{(h)} f_a'^*,$$
$$f_a' = \Gamma_1'^{(h)} f_a^* + \Gamma_2'^{(h)} f_a'^*$$

schreiben wir nun in der Form

(40)
$$\begin{cases} M_1^{(h)} f_a + M_2^{(h)} f_a' = \mu^{(h)} (M_1^{(h)} f_a^* + M_2^{(h)} f_a'^*), \\ M_1'^{(h)} f_a + M_2'^{(h)} f_a' = \mu'^{(h)} (M_1'^{(h)} f_a^* + M_2'^{(h)} f_a'^*), \end{cases}$$

indem wir der Kürze halber annehmen, daß die Elementarteiler der zu jener Substitution gehörigen charakteristischen Determinante demgemäß ausfallen. Bei Gebrauch von (39) werde identisch:

(41)
$$M_1^{(h)} f_a^* + M_2^{(h)} f_a^* = N_1^{(h)} f_j + N_2^{(h)} f_j',$$
$$M_1'^{(h)} f_a^* + M_2'^{(h)} f_a^* = N_1'^{(h)} f_j + N_2'^{(h)} f_j';$$

dabei bedeuten die Größen Γ, Γ' bzw. M, M' bzw. N, N' Konstante jedesmal mit nicht verschwindender Determinante und μ, μ' von Null verschiedene Konstante.

Nunmehr konstruieren wir in ähnlicher Weise, wie dies oben (vergl. S. 92) geschehen ist, innerhalb bzw. außerhalb von C regulär analytische Hilfsfunktionen, deren Randwertquotienten auf C in den Punkten $z^{(h)}$ gewisse Unstetigkeiten aufweisen.

Zunächst bilden wir die innerhalb bzw. außerhalb C regulär analytischen Funktionen

$$\varphi_j^{(h)}(z) = l(z - z^{(h)}) \text{ bzw. } \varphi_a^{(h)}(z) = l\left(\frac{z - z^{(h)}}{z - p_j}\right),$$

wo p_j wiederum irgendeinen, innerhalb C gelegenen Punkt bedeutet. Setzen wir dann

$$\varepsilon^{(h)} = \frac{1}{2i\pi} l\mu^{(h)}, \quad \varepsilon'^{(h)} = \frac{1}{2i\pi} l\mu'^{(h)},$$

wo für $l\mu^{(h)}$, $l\mu'^{(h)}$ diejenigen Werte des Logarithmus zu nehmen sind, für die — unter $\Re(\varepsilon^{(h)})$, $\Re(\varepsilon'^{(h)})$ Realteil von $\varepsilon^{(h)}$, $\varepsilon'^{(h)}$ verstanden —

$$0 < \Re(\varepsilon^{(h)}) \leqq 1, \quad 0 < \Re(\varepsilon'^{(h)}) \leqq 1$$

ausfällt, und bilden die Funktionen:

$$\psi_a^{(h)}(z) = e^{\varepsilon^{(h)}\varphi_a^{(h)}(z)}, \quad \psi_a'^{(h)}(z) = e^{\varepsilon'^{(h)}\varphi_a^{(h)}(z)},$$
$$\psi_j^{(h)}(z) = e^{\varepsilon^{(h)}\varphi_j^{(h)}(z)}, \quad \psi_j'^{(h)}(z) = e^{\varepsilon'^{(h)}\varphi_j^{(h)}(z)},$$

so sind die Funktionen $\psi_a^{(h)}(z)$, $\psi_a'^{(h)}(z)$ außerhalb C, die Funktionen $\psi_j^{(h)}(z)$, $\psi_j'^{(h)}(z)$ innerhalb C und sämtliche Funktionen überdies auch auf C regulär analytisch mit Ausnahme jedesmal des Punktes $z = z^{(h)}$.

Ferner bestimmen wir die ganzen rationalen Funktionen von z

$$A^{(h)}(z),\ A'^{(h)}(z),\ J^{(h)}(z),\ J'^{(h)}(z), \quad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

in der Weise, daß sie folgende Kongruenzen erfüllen:

$$(42) \qquad \left.\begin{aligned} A^{(h)}(z) &\equiv 1, \quad (z - z^{(h)})^4 \\ A^{(h)}(z) &\equiv 0, \quad (z - z^{(k)})^4 \\ A'^{(h)}(z) &\equiv 1, \quad (z - z^{(h)})^4 \\ A'^{(h)}(z) &\equiv 0, \quad (z - z^{(k)})^4 \\ J^{(h)}(z) &\equiv 1, \quad (z - z^{(h)})^4 \\ J^{(h)}(z) &\equiv 0, \quad (z - z^{(k)})^4 \\ J'^{(h)}(z) &\equiv 1, \quad (z - z^{(h)})^4 \\ J'^{(h)}(z) &\equiv 0, \quad (z - z^{(k)})^4 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} h, k = 1, 2, \ldots, m \\ h \neq k \end{pmatrix},$$

und setzen dann der Kürze halber

$$
(43)\quad
\begin{aligned}
M_1(z) &= A^{(1)}(z)M_1^{(1)} + \cdots + A^{(m)}(z)M_1^{(m)},\\
M_2(z) &= A^{(1)}(z)M_2^{(1)} + \cdots + A^{(m)}(z)M_2^{(m)},\\
M_1'(z) &= A^{(1)}(z)M_1'^{(1)} + \cdots + A^{(m)}(z)M_1'^{(m)},\\
M_2'(z) &= A^{(1)}(z)M_2'^{(1)} + \cdots + A^{(m)}(z)M_2'^{(m)},\\
\psi_a(z) &= A^{(1)}(z)\psi_a^{(1)}(z) + \cdots + A^{(m)}(z)\psi_a^{(m)}(z),\\
\psi_a'(z) &= A^{(1)}(z)\psi_a'^{(1)}(z) + \cdots + A^{(m)}(z)\psi_a'^{(m)}(z),\\
N_1(z) &= J^{(1)}(z)N_1^{(1)} + \cdots + J^{(m)}(z)N_1^{(m)},\\
N_2(z) &= J^{(1)}(z)N_2^{(1)} + \cdots + J^{(m)}(z)N_2^{(m)},\\
N_1'(z) &= J^{(1)}(z)N_1'^{(1)} + \cdots + J^{(m)}(z)N_1'^{(m)},\\
N_2'(z) &= J^{(2)}(z)N_2'^{(1)} + \cdots + J^{(m)}(z)N_2'^{(m)},\\
\psi_j(z) &= J^{(1)}(z)\psi_j^{(1)}(z) + \cdots + J^{(m)}(z)\psi_j^{(m)}(z),\\
\psi_j'(z) &= J^{(1)}(z)\psi_j'^{(1)}(z) + \cdots + J^{(m)}(z)\psi_j'^{(m)}(z).
\end{aligned}
$$

Endlich denken wir uns nötigenfalls die Kurve C ein wenig variiert derart, daß auf der variierten Kurve — die wiederum analytisch sei, die Punkte $z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}$ enthalte und auch kurz mit C bezeichnet werde — die Funktionen

$$\psi_j(z), \psi_j'(z), \psi_a(z), \psi_a'(z), M_1(z), M_2'(z);\;\; M_2(z), M_1'(z), N_1(z) N_2'(z);\;\; N_2(z), N_1'(z)$$

überall mit etwaiger Ausnahme dieser Punkte $z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}$ von Null verschieden ausfallen.

Bezeichnen wir dann mit $s^{(h)}$ den zu $z^{(h)}$ gehörigen Wert der Bogenlänge s, so gelten wie oben (vgl. S. 93) auf C in genügender Nähe von $s = s^{(h)}$ die Entwickelungen

$$
(44)\quad
\begin{cases}
\varphi_j^{(h)} = -i\pi + l(s - s^{(h)}) + J_0^{(h)} + J_1^{(h)}(s - s^{(h)}) + \cdots, & (s > s^{(h)})\\
\phantom{\varphi_j^{(h)}} = \phantom{-i\pi +{}} l(s^{(h)} - s) + J_0^{(h)} + J_1^{(h)}(s - s^{(h)}) + \cdots, & (s < s^{(h)}),\\
\varphi_a^{(h)} = i\pi + l(s - s^{(h)}) + A_0^{(h)} + A_1^{(h)}(s - s^{(h)}) + \cdots, & (s > s^{(h)})\\
\phantom{\varphi_a^{(h)}} = \phantom{i\pi +{}} l(s^{(h)} - s) + A_0^{(h)} + A_1^{(h)}(s - s^{(h)}) + \cdots, & (s < s^{(h)}),
\end{cases}
$$

wo $l(s - s^{(h)})$, $l(s^{(h)} - s)$ die reellen Logarithmen und $J_0^{(h)}, J_1^{(h)}, \ldots A_0^{(h)}, A_1^{(h)}, \ldots$ gewisse komplexe Koeffizienten bedeuten.

Bezeichnen wir die Randwerte der Funktionen $\psi_a^{(h)}(z)$, $\psi_a'^{(h)}(z)$, $\psi_j^{(h)}(z)$, $\psi_j'^{(h)}(z)$ auf C bzw. mit $\psi_a^{(h)}$, $\psi_a'^{(h)}$, $\psi_j^{(h)}$, $\psi_j'^{(h)}$, so gelten demnach auf C in genügender Nähe des Punktes $s = s^{(h)}$ die Entwickelungen

$$(45)\quad \begin{cases} \psi_j^{(h)} = e^{-\frac{1}{2}l\mu^{(h)} + \varepsilon^{(h)} l(s - s^{(h)})}\mathfrak{P}_j^{(h)}, & (s > s^{(h)}) \\ \qquad = e^{\varepsilon^{(h)} l(s^{(h)} - s)}\mathfrak{P}_j^{(h)} & (s < s^{(h)}), \\ \psi_j'^{(h)} = e^{-\frac{1}{2}l\mu'^{(h)} + \varepsilon'^{(h)} l(s - s^{(h)})}\mathfrak{P}_j'^{(h)}, & (s > s^{(h)}) \\ \qquad = e^{\varepsilon'^{(h)} l(s^{(h)} - s)}\mathfrak{P}_j'^{(h)}, & (s < s^{(h)}), \\ \psi_a^{(h)} = e^{\frac{1}{2}l\mu^{(h)} + \varepsilon^{(h)} l(s - s^{(h)})}\mathfrak{P}_a^{(h)}, & (s > s^{(h)}) \\ \qquad = e^{\varepsilon^{(h)} l(s^{(h)} - s)}\mathfrak{P}_a^{(h)}, & (s < s^{(h)}), \\ \psi_a'^{(h)} = e^{\frac{1}{2}l\mu'^{(h)} + \varepsilon'^{(h)} l(s - s^{(h)})}\mathfrak{P}_a'^{(h)}, & (s > s^{(h)}) \\ \qquad = e^{\varepsilon'^{(h)} l(s^{(h)} - s)}\mathfrak{P}_a'^{(h)}, & (s < s^{(h)}), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_j^{(h)}$, $\mathfrak{P}_j'^{(h)}$, $\mathfrak{P}_a^{(h)}$, $\mathfrak{P}_a'^{(h)}$ reguläre, nach Potenzen von $s - s^{(h)}$ fortschreitende, für $s = s^{(h)}$ nicht verschwindende Potenzreihen sind.

Wenden wir uns nach diesen Vorbereitungen zu der ursprünglich vorgelegten Aufgabe zurück und führen statt der gesuchten Funktionen $f_a(z)$, $f_a'(z)$ die Funktionen $g_a(z)$, $g_a'(z)$ vermöge der Gleichungen

$$(48)\quad \begin{aligned} M_1(z)f_a(z) + M_2(z)f_a'(z) &= \psi_a(z)g_a(z), \\ M_1'(z)f_a(z) + M_2'(z)f_a'(z) &= \psi_a'(z)g_a'(z) \end{aligned}$$

und statt der gesuchten Funktionen $f_j(z)$, $f_j'(z)$ die Funktionen $g_j(z)$, $g_j'(z)$ vermöge der Gleichungen

$$(49)\quad \begin{aligned} N_1(z)f_j(z) + N_2(z)f_j'(z) &= \psi_j(z)g_j(z), \\ N_1'(z)f_j(z) + N_2'(z)f_j'(z) &= \psi_j'(z)g_j'(z) \end{aligned}$$

ein, so geht die ursprünglich vorgelegte Aufgabe in die Aufgabe über, die Funktionen $g_a(z)$, $g_a'(z)$, $g_j(z)$, $g_j'(z)$ außerhalb bzw. innerhalb der Kurve C vom Charakter rationaler Funktionen derart zu bestimmen, daß ihre Randwerte g_a, g_a', g_j, g_j' auf C die Relationen

$$(50)\quad \begin{aligned} g_a &= c_1 g_j + c_2 g_j', \\ g_a' &= c_1' g_j + c_2' g_j' \end{aligned}$$

erfüllen, wobei die Koeffizienten c_1, c_2, c_1', c_2' gewisse endliche Ausdrücke in s mit von Null verschiedener Determinante sind, die leicht aus (38) vermittels (48) und (49) berechnet werden können.

Zur Lösung dieser letzteren Aufgabe können wir unseren Satz 30 anwenden, da die Koeffizienten c_1, c_2, c_1', c_2' zweimal stetig differenzierbare Ausdrücke in s werden. Den Nachweis hierfür erbringen wir, wie folgt.

Da die Kurve C als analytisch angenommen war, so erhalten wir die Punkte auf C in der Umgebung von $z = z^{(h)}$ durch die Formel

$$z(s) = z^{(h)} + C_1(s - s^{(h)}) + C_2(s - s^{(h)})^2 + \cdots,$$

wo rechter Hand eine reguläre nach Potenzen von $s - s^{(h)}$ fortschreitende Reihe steht. Die Kongruenzen (42) werden demnach, wenn wir die Variable z in die Umgebung von $z^{(h)}$ auf C wandern lassen, unmittelbar in Kongruenzen für die entsprechenden Randwerte nach dem Modul $(s - s^{(h)})^4$ übergehen.

Wir erweitern noch den Begriff der Kongruenz auf allgemeinere Ausdrücke S_1, S_2 in s, indem wir, wenn in einer Formel

$$S_1 - S_2 = (s - s^{(h)})^{\mathfrak{e}} \mathfrak{P} + (s - s^{(h)})^{\mathfrak{e}'} \mathfrak{P}'$$

beide Exponenten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ Realteile $\geqq 3$ bzw. $\geqq 4$ besitzen und $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ reguläre Potenzreihen in $s - s^{(h)}$ sind, ebenfalls

$$S_1 \equiv S_2, \quad (s - s^{(h)})^3$$

bzw.

$$S_1 \equiv S_2, \quad (s - s^{(h)})^4$$

schreiben.

Alsdann folgt aus (48), wenn wir die Variable z in die Umgebung von $z^{(h)}$ auf C wandern lassen, mit Rücksicht auf die Kongruenzen (42) und (43):

$$\text{(51)} \qquad \begin{aligned} M_1^{(h)} f_a + M_2^{(h)} f_a' &\equiv \psi_a^{(h)} g_a, \quad (s - s^{(h)})^4, \\ M_1'^{(h)} f_a + M_2'^{(h)} f_a' &\equiv \psi_a'^{(h)} g_a', \quad (s - s^{(h)})^4. \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus (49) mit Rücksicht auf (42) und (43):

$$\begin{aligned} N_1^{(h)} f_j + N_2^{(h)} f_j' &\equiv \psi_j^{(h)} g_j, \quad (s - s^{(h)})^4 \\ N_1'^{(h)} f_j + N_2'^{(h)} f_j' &\equiv \psi_j'^{(h)} g_j', \quad (s - s^{(h)})^4, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich wegen (41)

$$\text{(52)} \qquad \begin{aligned} M_1^{(h)} f_a^* + M_2^{(h)} f_a'^* &\equiv \psi_j^{(h)} g_j, \quad (s - s^{(h)})^4 \\ M_1'^{(h)} f_a^* + M_2'^{(h)} f_a'^* &\equiv \psi_j'^{(h)} g_j', \quad (s - s^{(h)})^4. \end{aligned}$$

Nunmehr unterscheiden wir die beiden Fälle, ob $s < s^{(h)}$ oder $s > s^{(h)}$ ausfällt. Im *ersteren* Falle liefert (38) die Relationen

$$\begin{aligned} f_a &= \gamma_1^{(h-1)} f_j + \gamma_2^{(h-1)} f_j', \\ f_a' &= \gamma_1'^{(h-1)} f_j + \gamma_2'^{(h-1)} f_j', \end{aligned}$$

d. h. mit Benutzung der Hilfsausdrücke (39)

$$\begin{aligned} f_a &= f_a^*, \\ f_a' &= f_a'^*; \end{aligned}$$

folglich ergeben (51) und (52) die Kongruenzen

$$\begin{aligned} \psi_a^{(h)} g_a &\equiv \psi_j^{(h)} g_j, \quad (s - s^{(h)})^4 \\ \psi_a'^{(h)} g_a' &\equiv \psi_j'^{(h)} g_j', \quad (s - s^{(h)})^4; \end{aligned}$$

und, wenn wir hier die Bedeutung der Ausdrücke $\psi_a^{(h)}$, $\psi_a'^{(h)}$, $\psi_j^{(h)}$, $\psi_j'^{(h)}$ bei $s < s^{(h)}$ aus (45) berücksichtigen und bedenken, daß die Realteile der Exponenten von $\varepsilon^{(h)}$, $\varepsilon'^{(h)}$ zwischen 0 und 1 liegen,

(53) $$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{P}_a^{(h)} g_a \equiv \mathfrak{P}_j^{(h)} g_j, & (s - s^{(h)3}), \\ \mathfrak{P}_a'^{(h)} g_a' \equiv \mathfrak{P}_j'^{(h)} g_j', & (s - s^{(h)3}) \end{array}\right\} \; s < s^{(h)}.$$

Ferner, im *zweiten* Falle $s > s^{(h)}$, liefert (38) die Relationen

$$f_a = \gamma_1^{(h)} f_j + \gamma_2^{(h)} f_j',$$
$$f_a' = \gamma_1'^{(h)} f_j + \gamma_2'^{(h)} f_j';$$

dies sind mit Benutzung der Hilfsausdrücke (39) die Formeln (40), und folglich ergeben jetzt (51) und (52) die Kongruenzen

$$\psi_a^{(h)} g_a \equiv \mu^{(h)} \psi_j^{(h)} g_j, \qquad (s - s^{(h)})^4,$$
$$\psi_a'^{(h)} g_a' \equiv \mu'^{(h)} \psi_j'^{(h)} g_j', \qquad (s - s^{(h)})^4.$$

Berücksichtigen wir hierin die Bedeutung der Ausdrücke $\psi_a^{(h)}$, $\psi_a'^{(h)}$, ψ_j^{h} $\psi_j'^{(h)}$ bei $s > s^{(h)}$ aus (45) und bedenken, daß die Realteile der Exponenten $\varepsilon^{(h)}$, $\varepsilon'^{(h)}$ zwischen 0 und 1 liegen, so wird bei Forthebung von $\mu^{(h)}$, $\mu'^{(h)}$ wiederum

(54) $$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{P}_a^{(h)} g_a \equiv \mathfrak{P}_j^{(h)} g_j, & (s - s^{(h)})^3, \\ \mathfrak{P}_a'^{(h)} g_a' \equiv \mathfrak{P}_j'^{(h)} g_j', & (s - s^{(h)})^3 \end{array}\right\} \; s > s^{(h)}.$$

Da $\mathfrak{P}_j^{(h)}$, $\mathfrak{P}_j'^{(h)}$, $\mathfrak{P}_a^{(h)}$, $\mathfrak{P}_a'^{(h)}$ reguläre nach Potenzen von $s - s^{(h)}$ fortschreitende und überdies für $s = s^{(h)}$ nicht verschwindende Potenzreihen sind, so erkennen wir aus (53) und (54), daß, gleichviel ob $s < s^{(h)}$ oder $s > s^{(h)}$ ausfällt, die Kongruenzen

$$g_a \equiv \frac{\mathfrak{P}_j^{(h)}}{\mathfrak{P}_a^{(h)}} g_j, \qquad (s - s^{(h)})^3$$
$$g_a' \equiv \frac{\mathfrak{P}_j'^{(h)}}{\mathfrak{P}_a'^{(h)}} g_j', \qquad (s - s^{(h)})^3$$

gelten müssen. Durch Vergleichung dieser Kongruenzen mit der Substitution (50) folgen für die Koeffizienten dieser Substitution die Kongruenzen

$$c_1 \equiv \frac{\mathfrak{P}_j^{(h)}}{\mathfrak{P}_a^{(h)}}, \quad c_2 \equiv 0, \quad (s - s^{(h)})^3,$$
$$c_1' \equiv 0, \qquad c_2' \equiv \frac{\mathfrak{P}_j'^{(h)}}{\mathfrak{P}_a'^{(h)}}, \; (s - s^{(h)})^3,$$

und diese zeigen, daß die Ausdrücke c_1, c_2, c_1', c_2' beim Durchgang durch den Punkt $s = s^{(h)}$ gewiß zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind.

Damit haben wir unsere Behauptung, wonach c_1, c_2, c_1', c_2' in (50) zweimal stetig differenzierbar in s sind, als richtig erkannt und *zugleich das besondere Riemannsche Problem der Auffindung von Funktionensystemen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe vollständig gelöst.*

Vierter Abschnitt.

Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln.

In diesem und dem folgenden Abschnitt wollen wir eine neue Methode zur Behandlung der Integralgleichungen entwickeln, die auf einer Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln beruht.

Die systematische Behandlung der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln ist auch an sich von großer Wichtigkeit und bildet eine wesentliche Ergänzung der bekannten Theorie der quadratischen Formen mit endlicher Variabelnzahl. Die Anwendungen der Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln sind nicht auf die Integralgleichungen beschränkt: es bietet sich nicht minder eine Berührung dieser Theorie mit der schönen Theorie der Kettenbrüche von Stieltjes[1]) dar, wie andererseits mit der Frage nach der Auflösung von Systemen unendlich vieler linearer Gleichungen, deren Untersuchung Hill, Poincaré, H. v. Koch und andere erfolgreich in Angriff genommen haben. Auch zu den Untersuchungen Minkowskis über Volumen und Oberfläche findet in methodischer Hinsicht nahe Beziehung statt. Vor allem aber eröffnet die Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln einen neuen Zugang zu den allgemeinsten Entwicklungen willkürlicher Funktionen in unendliche Reihen nach Fourierscher Art, wie am Schlusse von Kapitel XI angedeutet werden wird.[2])

Elftes Kapitel.

Theorie der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form mit unendlichvielen Variabeln.

Es seien

$$k_{pq} = k_{qp},$$

wo jeder der beiden Indizes p, q die Reihe aller ganzen Zahlen $1, 2, \ldots$ durchläuft, beliebig gegebene reelle Konstanten, dann stellt

$$K(x) = \sum_{(p,\, q = 1, 2, \ldots)} k_{pq} x_p x_q$$

eine *quadratische Form* mit den unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ dar; die Konstanten k_{pq} heißen die Koeffizienten dieser quadratischen Form. Ein Ausdruck

1) Recherches sur les fractions continues, Ann. de Toulouse Bd. 8 (1894).

2) Man vergleiche zu der hier entwickelten Theorie die Habilitationsschrift von Hellinger „Neue Begründung der Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen". Journal für Math. Bd. 136.

$$A(x, y) = \sum_{(p, q = 1, 2, \ldots)} a_{pq} x_p y_q$$

mit irgendwelchen Koeffizienten a_{pq} heißt ein *bilinearer Ausdruck* oder eine *bilineare Form* der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$. Der Ausdruck

$$K(x, y) = \sum_{(p, q = 1, 2, \ldots)} k_{pq} x_p y_q$$

heißt *die zu $K(x)$ gehörige Bilinearform* der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$.

Lassen wir die Indizes p, q nur die Werte $1, \ldots, n$ durchlaufen, wo n eine endliche Zahl bedeutet, so entspringen die Formen mit der endlichen Variabelnzahl n, wie folgt:

$$K_n(x) = \sum_{(p, q = 1, \ldots, n)} k_{pq} x_p x_q,$$

$$K_n(x, y) = \sum_{(p, q = 1, \ldots, n)} k_{pq} x_p y_q.$$

Die Formen $K_n(x)$, $K_n(x, y)$ mögen die *Abschnitte* der Form $K(x)$ bzw. $K(x, y)$ heißen und auch, mitunter, ohne den Index n ausdrücklich hinzuzusetzen, mit $[K]$ bezeichnet werden.

Wenn irgendein bilinearer Ausdruck mit endlicher Variabelnzahl

$$A_n(x, y) = \sum_{(p, q = 1, \ldots, n)} a_{pq} x_p y_q$$

vorgelegt ist, so heiße die Summe aller Koeffizienten der Glieder $x_p y_p$ die *Faltung* des Ausdruckes $A_n(x, y)$ und werde mit $A_n(.,.)$ bezeichnet; es ist also

$$A_n(.,.) = \sum_{(p = 1, \ldots, n)} a_{pp}$$

und insbesondere

$$K_n(.,.) = k_{11} + \cdots + k_{nn}.$$

Ist

$$B_n(x, y) = \sum_{(p, q = 1, 2, \ldots n)} b_{pq} x_p y_q$$

eine zweite Bilinearform, so bilden wir in diesem Sinne die Faltung des als Bilinearform der z_p und z_p' betrachteten Produktes $A_n(x, z) \cdot B_n(z', y)$:

$$A_n(x, .)\, B_n(., y) = \sum_{(p, q, r = 1, \ldots n)} a_{pq} b_{qr} x_p y_r$$

und bezeichnen diese Bilinearform der x_p, y_p kurz als Faltung von A_n und B_n.

Außer den allgemeinen quadratischen Formen K, K_n ziehen wir noch die besonderen quadratischen Formen

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots,$$

$$(x, x)_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

und die besonderen Bilinearformen

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \cdots$$
$$(x, y)_n = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

in Betracht.

Die Diskriminante der Form

$$(x, x)_n - \lambda K_n(x)$$

d. h. die Determinante

$$(1) \qquad D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11}, & -\lambda k_{12}, \ldots, & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21}, & 1 - \lambda k_{22}, \ldots, & -\lambda k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda k_{n1}, & -\lambda k_{n2}, \ldots, & 1 - \lambda k_{nn} \end{vmatrix}$$

ist bekanntlich eine ganze rationale Funktion $n$ten Grades in λ mit lauter reellen Nullstellen; diese mögen mit

$$\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}$$

bezeichnet werden und die *Eigenwerte* der Form K_n heißen; die Gesamtheit dieser n Eigenwerte heiße das *Spektrum* der Form K_n. Wenn ein reeller Wert λ so beschaffen ist, daß in ihm oder in beliebiger Nähe desselben noch für unendlich viele n Eigenwerte von K_n liegen, so heiße dieser Wert λ ein Verdichtungswert von K. Wenn die Beträge der absolut größten Eigenwerte von K_n mit wachsendem n über alle Grenzen wachsen, so soll der Wert $\lambda = \infty$ ebenfalls als Verdichtungswert der Form K gerechnet werden.

Wir bilden nun aus (1) durch Ränderung die Determinante

$$D_n(\lambda; x, y) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11}, \ldots, & -\lambda k_{1n}, & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda k_{n1}, \ldots, & 1 - \lambda k_{nn}, & x_n \\ y_1, \ldots, & y_n, & 0 \end{vmatrix}$$

und nennen den Quotienten

$$\mathsf{K}_n(\lambda; x, y) = -\frac{D_n(\lambda; x, y)}{D_n(\lambda)}$$

bzw.

$$\mathsf{K}_n(\lambda; x) = \mathsf{K}_n(\lambda; x, x)$$

die *Resolvente der quadratischen Form* K_n; die Koeffizienten von $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathsf{K}_n(\lambda; x, y)$ geben, wenn λ kein Eigenwert ist, die Lösung der linearen Gleichungen

$$x_p - \lambda(k_{p1} x_1 + \cdots + k_{pn} x_n) = y_p, \qquad (p = 1, \ldots, n);$$

wir drücken dies durch die Identität aus:

$$\mathsf{K}_n(\lambda; x, y) - \lambda K_n(x, .) \mathsf{K}_n(\lambda; ., y) = (x, y).$$

Es ist offenbar

(2) $\mathsf{K}_n(\lambda; x, y) = (x, y)_n + \lambda K_n(x, y) + \lambda^2 K_n K_n(x, y) + \lambda^3 K_n K_n K_n(x, y) + \cdots,$

wo $K_n K_n, K_n K_n K_n, \ldots$ die aus K_n durch fortgesetzte Faltungen entstehenden Formen

$$K_n K_n(x, y) = K_n(x, .) K_n(. , y) = \sum_{(p, q, r = 1, \ldots, n)} k_{pr} k_{rq} x_p y_q,$$

$$K_n K_n K_n(x, y) = K_n(x, .) K_n K_n(. , y) = \sum_{(p, q, r, s = 1, \ldots, n)} k_{pr} k_{rs} k_{sq} x_p y_q,$$

. . . .

bedeuten. Für die Resolvente K_n gilt die Partialbruchdarstellung

(3) $$\mathsf{K}_n(\lambda; x, y) = \frac{L_1^{(n)}(x) L_1^{(n)}(y)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1^{(n)}}} + \cdots + \frac{L_n^{(n)}(x) L_n^{(n)}(y)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n^{(n)}}},$$

wo $L_1^{(n)}, \ldots, L_n^{(n)}$ gewisse lineare Formen der Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ mit reellen Koeffizienten, die „Eigenformen" von K_n bedeuten. Insbesondere gelten mithin die Formeln:

(4) $$\begin{aligned} (x, y)_n = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n &= L_1^{(n)}(x) L_1^{(n)}(y) + \cdots + L_n^{(n)}(x) L_n^{(n)}(y), \\ K_n(x, y) &= \frac{L_1^{(n)}(x) L_1^{(n)}(y)}{\lambda_1^{(n)}} + \cdots + \frac{L_n^{(n)}(x) L_n^{(n)}(y)}{\lambda_n^{(n)}} \end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned} (x, x)_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2 &= (L_1^{(n)}(x))^2 + \cdots + (L_n^{(n)}(x))^2, \\ K_n(x) &= \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{\lambda_1^{(n)}} + \cdots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{\lambda_n^{(n)}}, \\ K_n K_n(x) &= \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{(\lambda_1^{(n)})^2} + \cdots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{(\lambda_n^{(n)})^2}, \\ K_n K_n K_n(x) &= \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{(\lambda_1^{(n)})^3} + \cdots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{(\lambda_n^{(n)})^3}, \end{aligned}$$

. . . .

Aus (4) folgen die Orthogonalitätseigenschaften der Linearformen $L_1^{(n)}, \ldots, L_n^{(n)}$:

$$L_p^{(n)}(.) L_q^{(n)}(.) = 0, \quad (p \neq q),$$
$$L_p^{(n)}(.) L_p^{(n)}(.) = 1,$$

wo $L_p(.) L_q(.)$ die Faltung der Bilinearform $L_p^{(n)}(x)\, L_q^{(n)}(y)$ bedeutet, und alsdann wiederum ergibt sich durch Faltung

(6) $$\begin{aligned} K_n(. , .) &= \sum_{(p = 1, \ldots, n)} k_{pp} &&= \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n^{(n)}}, \\ K_n K_n(. , .) &= \sum_{(p, r = 1, \ldots, n)} k_{pr} k_{rp} &&= \frac{1}{(\lambda_1^{(n)})^2} + \cdots + \frac{1}{(\lambda_n^{(n)})^2}, \\ K_n K_n K_n(. , .) &= \sum_{(p, r, s = 1, \ldots, n)} k_{pr} k_{rs} k_{sp} &&= \frac{1}{(\lambda_1^{(n)})^3} + \cdots + \frac{1}{(\lambda_n^{(n)})^3}, \end{aligned}$$

. . . .

Unsere erste wichtige Aufgabe besteht darin, den Begriff der Resolvente der Form K_n auf die Form K zu übertragen und zu der Partialbruchdarstellung (3) das Analogon für die Form K mit unendlich vielen Variabeln aufzusuchen.

Zu dem Zwecke bedienen wir uns eines allgemeinen Hilfssatzes aus dem Gebiete der stetigen (gleichmäßigen) Konvergenz.[1]

Hilfssatz 1. Es sei J ein ganz im Endlichen gelegenes Intervall für die Variable s, ferner

(7) $$f_1(s), f_2(s), f_3(s), \ldots$$

eine unendliche Reihe von Funktionen der Variabeln s, die in J stetig sind, deren Werte absolut genommen unterhalb einer endlichen Grenze bleiben und deren Differenzenquotienten sämtlich unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, so daß für alle s, t in J und für alle h

$$\left|\frac{f_h(s)-f_h(t)}{s-t}\right| \leqq E$$

gilt, wo E eine endliche von h und von der Wahl der Argumente s, t unabhängige Größe bedeutet:

Alsdann lassen sich aus ebendieser Reihe von Funktionen (7) unendlich viele Funktionen

$$f_1^*(s), f_2^*(s), f_3^*(s), \ldots$$

auswählen derart, daß die Reihe dieser Funktionen für jeden beliebigen Punkt in J gegen einen endlichen Grenzwert, und zwar stetig (mithin auch gleichmäßig) konvergiert, woraus ersichtlich ist, daß der Limes

$$\underset{p=\infty}{L} f_p^*(s)$$

eine in J stetige Funktion von s darstellt.

Zum Beweise bestimmen wir auf die Art, wie es in § 5 der oben zitierten Abhandlung über das Dirichletsche Prinzip geschehen ist, aus der Reihe (7) eine Reihe von Funktionen $f_1^*(s), f_2^*(s), \ldots$ derart, daß die Reihe dieser Funktionen für jeden Punkt einer in J überall dichten abzählbaren Punktmenge P^* gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert; die so ausgewählten Funktionen sind, wie wir nun zeigen wollen, von der im Hilfssatze verlangten Art.

In der Tat bezeichnen wir mit $s_1, s_2, \ldots$ irgendeine unendliche Reihe von Punkten aus J, die gegen einen bestimmten Punkt s konvergiert. Bedeutet dann ε irgendeine beliebig kleine positive Größe, so bestimmen wir zunächst einen Punkt s^* der Punktmenge P^* derart, daß

(8) $$|s^* - s| < \frac{\varepsilon}{8E}$$

---

1) Vgl. die Abhandlung des Verf. „Über das Dirichletsche Prinzip“, Math. Ann. Bd. 59 (1904).

wird; wegen der Konvergenz der Wertreihe

$$f_1^*(s^*),\ f_2^*(s^*), \ldots$$

läßt sich alsdann gewiß eine Zahl N finden, so daß für alle N überschreitenden Indizes p, q

$$(9) \qquad |f_p^*(s^*) - f_q^*(s^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird; wegen der Konvergenz der Punktreihe $s_1, s_2, \ldots$ kann diese ganze Zahl N zugleich auch so groß gewählt werden, daß für alle N überschreitenden Indizes p, q

$$|s - s_p| < \frac{\varepsilon}{8E}, \quad |s - s_q| < \frac{\varepsilon}{8E}$$

ausfällt. Mit Hilfe von (8) folgt hieraus für alle N überschreitenden Indizes p, q

$$(10) \qquad |s^* - s_p| < \frac{\varepsilon}{4E}, \quad |s^* - s_q| < \frac{\varepsilon}{4E}.$$

Andrerseits ist nun wegen der Voraussetzung unseres Hilfssatzes

$$\left|\frac{f_p^*(s^*) - f_p^*(s_p)}{s^* - s_p}\right| < E, \quad \left|\frac{f_q^*(s^*) - f_q^*(s_q)}{s^* - s_q}\right| < E,$$

und folglich mit Hilfe von (10)

$$|f_p^*(s^*) - f_p^*(s_p)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_q^*(s^*) - f_q^*(s_q)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Addieren wir diese Gleichungen zu (9), so folgt für alle N überschreitenden Indizes p, q

$$|f_p^*(s^*) - f_q^*(s^*)| + |f_p^*(s^*)| - f_p^*(s_p)| + |f_q^*(s^*) - f_q^*(s_q)| < \varepsilon,$$

und um so mehr

$$|f_p^*(s_p) - f_q^*(s_q)| < \varepsilon.$$

Da ε eine beliebig kleine Größe war, so folgt hieraus, daß die Wertreihe

$$f_1^*(s_1),\ f_2^*(s_2), \ldots$$

gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, d. h. die Funktionenreihe

$$f_1^*(s),\ f_2^*(s), \ldots$$

konvergiert stetig an jeder Stelle s des Intervalles J, womit der Hilfssatz vollständig erwiesen ist.

Wir kehren zur Theorie der quadratischen Formen zurück, und zwar nehmen wir im folgenden zunächst an, es sei $\lambda = \infty$ nicht Verdichtungswert von K, d. h. es sei K eine solche Form, daß die sämtlichen Eigenwerte von K_n für alle n in dem endlichen Intervalle J liegen. Wir definieren sodann gewisse zu K_n gehörige Funktionen der Variabeln λ, wie folgt: es werde allgemein

$$(11)\qquad \left.\begin{array}{ll} \varkappa_p^{(n)}(\lambda) = 0 & \text{für } \lambda \leqq \lambda_p^{(n)} \\ \varkappa_p^{(n)}(\lambda) = (L_p^{(n)}(x))^2(\lambda - \lambda_p^{(n)}) & \text{für } \lambda > \lambda_p^{(n)} \end{array}\right\} p = 1, \ldots, n$$

und

$$\varkappa^{(n)}(\lambda) = \varkappa_1^{(n)}(\lambda) + \cdots + \varkappa_n^{(n)}(\lambda)$$

gesetzt; dann sind $\varkappa_p^{(n)}$ und folglich auch $\varkappa^{(n)}$ stetige Funktionen von λ, die nirgends negativ ausfallen und bei wachsendem Argument λ und festgehaltenem n niemals abnehmen; die Differenzenquotienten dieser Funktionen, d. h. die Ausdrücke

$$\frac{\varkappa_p^{(n)}(\lambda) - \varkappa_p^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu},$$

$$\frac{\varkappa^{(n)}(\lambda) - \varkappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu}$$

sind, wie wir ebenfalls sofort sehen, nirgends negativ und nehmen, wenn eines der Argumente λ, μ fest bleibt und das andere wächst, niemals ab, und zwar gelten die Gleichungen

$$\frac{\varkappa_p^{(n)}(\lambda) - \varkappa_p^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu} = \pi_p(L_p^{(n)}(x))^2$$

und folglich

$$\frac{\varkappa^{(n)}(\lambda) - \varkappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu} = \pi_1(L_1^{(n)}(x))^2 + \cdots + \pi_n(L_n^{(n)}(x))^2,$$

wo $\pi_1, \ldots, \pi_n$ zwischen 0 und 1 liegende, von λ, μ abhängige Größen bedeuten. Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar die Ungleichung

$$\left|\frac{\varkappa^{(n)}(\lambda) - \varkappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu}\right| \leqq (L_1^{(n)}(x))^2 + \cdots + (L_n^{(n)}(x))^2,$$

oder wegen (5)

$$(12)\qquad \left|\frac{\varkappa^{(n)}(\lambda) - \varkappa^{(n)}(\mu)}{\lambda - \mu}\right| \leqq x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Endlich bemerken wir noch, daß auf jeder Strecke, die keinen der Eigenwerte $\lambda_p^{(n)}$ von K_n enthält, die Funktionen $\varkappa_p^{(n)}(\lambda)$ und folglich auch die $\varkappa^{(n)}(\lambda)$ lineare Funktionen von λ sind. Für alle außerhalb auf der negativen Seite von J gelegenen λ ist $\varkappa^{(n)}(\lambda)$ identisch Null; daher ist mit Rücksicht auf (12) stets:

$$\varkappa^{(n)}(\lambda) \leqq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)J,$$

wo J die Länge des Intervalles J bezeichnet. Auf der positiven Seite außerhalb von J ist

$$\varkappa^{(n)}(\lambda) = \lambda(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + C_n(x),$$

wo $C_n(x)$ eine von λ unabhängige Form bedeutet. In bezug auf die Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ ist $\varkappa^{(n)}$ eine quadratische Form.

Es seien nunmehr unendlich viele Variable $x_1, x_2, \ldots$ vorgelegt; wir ziehen dann diejenigen speziellen Wertsysteme in Betracht, die entstehen, wenn wir irgendeine dieser Variabeln gleich 1 und alle übrigen gleich 0,

oder wenn wir irgend zwei dieser Variabeln gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und alle übrigen gleich 0 setzen. Wir denken uns alle diese speziellen Wertsysteme der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ in bestimmter Weise in eine Reihe geordnet und bezeichnen sie in dieser Reihenfolge als erstes, zweites, drittes usf. spezielles Wertsystem der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ Für alle diese speziellen Wertsysteme gilt wegen (12) die Ungleichung

$$\left|\frac{\varkappa^{(n)}(\lambda)-\varkappa^{(n)}(\mu)}{\lambda-\mu}\right| \leqq 1. \tag{13}$$

Wir betrachten nun die Formenreihe

$$\varkappa^{(1)}(\lambda),\ \varkappa^{(2)}(\lambda),\ \varkappa^{(3)}(\lambda),\ \ldots \tag{14}$$

und wenden, indem wir für die Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ das erste spezielle Wertsystem eingesetzt denken, unsern Hilfssatz 1 an: wir sehen, daß dann im Intervalle J für λ die Werte der Formenreihe (14) sämtlich unterhalb einer endlichen Grenze liegen müssen und wegen (13) auch die weitere Voraussetzung unseres Hilfssatzes erfüllt ist. Diesem Hilfssatz zufolge läßt sich daher aus (14) gewiß eine unendliche Reihe von Formen

$$\varkappa^{(1^*)}(\lambda),\ \varkappa^{(2^*)}(\lambda),\ \varkappa^{(3^*)}(\lambda),\ \ldots \tag{15}$$

auswählen, die, wenn wir darin für die Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ das erste spezielle Wertsystem einsetzen, gegen eine gewisse stetige Funktion von λ in dem Intervalle J gleichmäßig konvergiert.

Sodann wenden wir unsern Hilfssatz auf die Formenreihe (15) an. Diesem Hilfssatz zufolge läßt sich aus jener Formenreihe gewiß eine unendliche Reihe

$$\varkappa^{(1^{**})}(\lambda),\ \varkappa^{(2^{**})}(\lambda),\ \varkappa^{(3^{**})}(\lambda),\ \ldots \tag{16}$$

auswählen, die, wenn wir darin für die Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ das zweite spezielle Wertsystem einsetzen, gegen eine gewisse stetige Funktion von λ gleichmäßig konvergiert. Indem wir ferner unsern Hilfssatz auf die Funktionenreihe (16) anwenden, gelangen wir durch Auswahl zu einer Funktionenreihe

$$\varkappa^{(1^{***})}(\lambda),\ \varkappa^{(2^{***})}(\lambda),\ \varkappa^{(3^{***})}(\lambda),\ \ldots,$$

die nach Einsetzung des dritten speziellen Wertsystems gegen eine gewisse stetige Funktion von λ gleichmäßig konvergiert.

Endlich betrachten wir, indem wir uns das Verfahren unbegrenzt fortgesetzt denken, die Formenreihe

$$\varkappa^{(1^*)}(\lambda),\ \varkappa^{(2^{**})}(\lambda),\ \varkappa^{(3^{***})}(\lambda),\ \ldots; \tag{17}$$

dieselbe konvergiert in λ gleichmäßig, sowohl wenn wir darin für die Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ das erste, als auch wenn wir das zweite, als auch wenn wir das dritte spezielle Wertsystem usf. einsetzen. Da sich aber allgemein der Koeffizient von $x_p x_q$ einer quadratischen Form linear aus

den drei Werten zusammensetzen läßt, die die quadratische Form für x_p, $x_q = 1{,}0$ bzw. $0{,}1$, bzw. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ annimmt, während man alle übrigen Variabeln gleich 0 setzt, so folgt, daß auch allgemein der Koeffizient von $x_p x_q$ in der Formenreihe (17) gegen eine gewisse in λ stetige Funktion $\varkappa_{pq}(\lambda)$ konvergiert. Wir setzen

$$\varkappa(\lambda) = \sum_{p,q=1,2\ldots} \varkappa_{pq}(\lambda) x_p x_q,$$

so daß $\varkappa(\lambda)$ eine quadratische Form der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ bedeutet, deren Koeffizienten stetige Funktionen von λ sind. Diese Funktionen von λ sind zunächst nur innerhalb J definiert; da wir aber statt J ein beliebig großes, J enthaltendes Intervall wählen dürfen, so ist damit die Definition jener Funktionen für alle endlichen Werte von λ gegeben.

Die Werte irgendeines Abschnittes einer quadratischen Form mit unendlich vielen Variabeln sind als lineare Kombinationen derjenigen Werte darstellbar, die die quadratische Form für unsere speziellen Wertsysteme annimmt. Daraus folgt, daß, wenn wir in den Formen der Formenreihe (17) $x_1, \ldots, x_n$ beliebig lassen, die übrigen Variabeln $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ sämtlich $= 0$ setzen, d. h. von jeder Form in (17) denselben Abschnitt nehmen, diese aus den Abschnitten gebildete Reihe gewiß ebenfalls gleichmäßig konvergiert, und zwar gegen denjenigen Wert, den der betreffende Abschnitt von $\varkappa(\lambda)$ annimmt. Wenn wir noch

$$1^{*} = m_1,\ 2^{**} = m_2,\ 3^{***} = m_3, \ldots$$

setzen, so gilt also die Gleichung:

$$\underset{h=\infty}{L} [\varkappa^{(m_h)}(\lambda)] = [\varkappa(\lambda)].$$

Der Kürze und Übersicht halber wollen wir im folgenden bei einer Gleichung oder einer Ungleichung die eckigen Klammern fortlassen, d. h. nach dieser Festsetzung ist eine Gleichung oder Ungleichung zwischen Formen mit unendlich vielen Variabeln stets so zu verstehen, daß sie identisch für alle Variabeln gilt, wenn man in der Formel auf beiden Seiten die gleichen Abschnitte der Formen nimmt; so lautet die letzte Gleichung

(18) $$\underset{h=\infty}{L} \varkappa^{(m_h)}(\lambda) = \varkappa(\lambda).$$

Zugleich bemerken wir, daß die obengenannten Eigenschaften der Funktionen $\varkappa^{(n)}(\lambda)$ als Funktion von λ sich sofort auf einen beliebigen Abschnitt $[\varkappa(\lambda)]$ der Form $\varkappa(\lambda)$ übertragen, wenn wir diesen als Funktion von λ betrachten. Wir erkennen so, daß die Funktion $[\varkappa(\lambda)]$ ebenfalls nirgends negativ ausfällt und bei wachsendem Argument λ niemals ab-

nimmt, ferner, daß der Differenzenquotient dieser Funktion d. h. der Ausdruck

$$\frac{[\varkappa(\lambda)]-[\varkappa(\mu)]}{\lambda-\mu}$$

wiederum nirgends negativ wird, und, wenn eines der Argumente λ, μ fest bleibt, während das andere wächst, niemals abnimmt. Wegen (12) folgt für jenen Differenzenquotienten die Ungleichung

$$\frac{\varkappa(\lambda)-\varkappa(\mu)}{\lambda-\mu}\leqq(x,x). \tag{19}$$

Innerhalb eines Intervalles, das keinen Verdichtungswert der Form K enthält, wird $[\varkappa(\lambda)]$ eine lineare Funktion von λ. Außerhalb J ist auf der negativen Seite $[\varkappa(\lambda)]$ identisch Null, auf der positiven Seite gleich $\lambda[(x,x)]+C(x)$.

Wir denken uns nun in der Form $\varkappa(\lambda)$ das erste spezielle Wertsystem eingesetzt und bezeichnen die so entstehende Funktion von λ mit $\varkappa(\lambda)_1$. Nach den obigen Ausführungen wird, wenn wir λ festhalten und μ einen λ übersteigenden Wert beilegen, der Differenzenquotient von $\varkappa(\lambda)_1$, sobald μ gegen λ hin abnimmt, gewiß nicht wachsen und mithin, wenn μ nach λ fällt, einem Grenzwert zustreben, d. h. $\varkappa(\lambda)_1$ besitzt gewiß für jedes λ einen vorderen Differentialquotienten; wir bezeichnen denselben mit $\mathfrak{k}^{(+)}(\lambda)_1$. In derselben Weise wird gezeigt, daß $\varkappa(\lambda)_1$ für jedes λ einen hinteren Differentialquotienten besitzt; wir bezeichnen denselben mit $\mathfrak{k}^{(-)}(\lambda)_1$.

Aus den obengenannten Tatsachen über die Differenzenquotienten von $\varkappa(\lambda)_1$ folgt zugleich, daß sowohl $\mathfrak{k}^{(+)}(\lambda)_1$, wie $\mathfrak{k}^{(-)}(\lambda)_1$ Funktionen von λ sind, die nirgends negativ ausfallen, mit wachsendem Argument λ nicht abnehmen und überdies stets den Ungleichungen

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}^{(-)}(\lambda)_1 &\leqq \mathfrak{k}^{(+)}(\mu)_1 \quad \text{für } \lambda\leqq\mu,\\ \mathfrak{k}^{(+)}(\lambda)_1 &\leqq \mathfrak{k}^{(-)}(\mu)_1 \quad \text{für } \lambda<\mu\end{aligned} \tag{20}$$

genügen.

Da ferner wegen (13) die Differentialquotienten $\mathfrak{k}^{(+)}(\lambda)_1$, $\mathfrak{k}^{(-)}(\lambda)_1$ den Wert 1 nicht überschreiten können, so gilt dasselbe um so mehr für die Differenz vom vorderen und hinteren Differentialquotienten an der nämlichen Stelle λ, und wir ersehen hieraus, daß, wenn m irgendeine ganze Zahl bedeutet, höchstens m Stellen λ vorhanden sind, für welche

$$\mathfrak{k}^{(+)}(\lambda)_1-\mathfrak{k}^{(-)}(\lambda)_1\geqq\frac{1}{m}$$

gilt. Wegen dieser Tatsache ist die Menge derjenigen Werte λ, für welche vorderer und hinterer Differentialquotient voneinander verschieden ausfallen, notwendig abzählbar.

Nunmehr denken wir uns in $\varkappa(\lambda)$ das zweite spezielle Wertsystem eingesetzt, verfahren mit der so entstehenden Funktion $\varkappa(\lambda)_2$, wie vorhin

mit $\varkappa(\lambda)_1$ geschehen ist, und suchen diejenige Menge von Stellen λ, für welche der vordere und hintere Differentialquotient voneinander verschieden ausfallen. Die Menge dieser Stellen λ ist gewiß wiederum abzählbar. Mit Benutzung des dritten speziellen Wertsystems erhalten wir entsprechend eine abzählbare Menge von Stellen λ usf. Die Gesamtheit aller solchen Stellen ist wiederum abzählbar; sie mögen *die Eigenwerte* der Form K heißen und mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ bezeichnet werden. Die Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ und ihre Verdichtungsstellen sind gewiß Verdichtungswerte der Form K, da ja $\varkappa(\lambda)_1, \varkappa(\lambda)_2, \ldots$ außerhalb der Verdichtungswerte lineare Funktionen von λ sind und folglich die vorderen und hinteren Differentialquotienten daselbst einander gleich ausfallen. Die Gesamtheit der Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ werde *das Punktspektrum oder das diskontinuierliche Spektrum* der Form K genannt.

Da die Koeffizienten einer quadratischen Form sich linear aus den Werten zusammensetzen lassen, die die quadratische Form für die Reihe der speziellen Wertsysteme der Variabeln annimmt, so schließen wir, daß die sämtlichen Koeffizienten $\varkappa_{pq}$ der Form $\varkappa(\lambda)$ ebenfalls sowohl vordere wie hintere Differentialquotienten besitzen, und daß dieselben für jede Stelle mit Ausnahme der Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ einander gleich sind; die vorderen und hinteren Differentialquotienten von $\varkappa_{pq}$ mögen mit $\mathfrak{k}_{pq}^{(+)}$ bzw. $\mathfrak{k}_{pq}^{(-)}$ bezeichnet werden. Für jede von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ verschiedene Stelle λ stimmen diese beiden Differentialquotienten miteinander überein; wir setzen daselbst

$$\mathfrak{k}_{pq} = \mathfrak{k}_{pq}^{(+)} = \mathfrak{k}_{pq}^{(-)};$$

die quadratischen Formen mit den Koeffizienten $\mathfrak{k}_{pq}^{(+)}, \mathfrak{k}_{pq}^{(-)}$ mögen mit $\mathfrak{k}^{(+)}(\lambda)$ bzw. $\mathfrak{k}^{(-)}(\lambda)$ bezeichnet werden. Für jede von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ verschiedene Stelle setzen wir

$$\mathfrak{k}(\lambda) = \mathfrak{k}^{(+)}(\lambda) = \mathfrak{k}^{(-)}(\lambda).$$

Wir bilden nun allgemein für die Stelle λ_h die Differenz $\mathfrak{k}_{pq}^{(+)} - \mathfrak{k}_{pq}^{(-)}$ und nehmen diese Differenz als Koeffizient von $x_p x_q$; die so entstehende quadratische Form mit unendlich vielen Variabeln, deren Koeffizienten jedenfalls nicht sämtlich verschwinden, werde *die zum Eigenwert λ_h gehörige quadratische Eigenform* von K genannt und mit E_h bezeichnet. Offenbar ist für jeden Eigenwert λ_p

(21) $$\mathfrak{k}^{(+)}(\lambda_p) - \mathfrak{k}^{(-)}(\lambda_p) = E_p,$$

und da auch zu (20) analog

(22) $$\begin{aligned} \mathfrak{k}^{(-)}(\lambda) &\leqq \mathfrak{k}^{(+)}(\mu) \text{ für } \lambda \leqq \mu, \\ \mathfrak{k}^{(+)}(\lambda) &\leqq \mathfrak{k}^{(-)}(\mu) \text{ für } \lambda < \mu \end{aligned}$$

gelten muß, so fällt gewiß

(23) $$E_p \geqq 0$$

aus. Andererseits folgt aus (19), wenn wir für μ einen λ übersteigenden Wert wählen und diesen gegen λ konvergieren lassen,

(24) $$\mathfrak{k}^{(+)}(\lambda) \leqq (x, x).$$

Wir betrachten nunmehr irgend m nach zunehmender Größe geordnete Eigenwerte der Form K, etwa

$$\lambda_{p_1}, \ldots, \lambda_{p_m},$$

und die diesen zugehörigen Eigenformen

$$E_{p_1}, \ldots, E_{p_m}.$$

Wegen (21) haben wir

(25) $$\mathfrak{k}^{(+)}(\lambda_{p_h}) - \mathfrak{k}^{(-)}(\lambda_{p_h}) = E_{p_h} \quad (h = 1, 2 \ldots, m)$$

und wegen (22)

(26) $$\begin{gathered} \mathfrak{k}^{(-)}(\lambda_{p_2}) - \mathfrak{k}^{(+)}(\lambda_{p_1}) \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{k}^{(-)}(\lambda_{p_m}) - \mathfrak{k}^{(+)}(\lambda_{p_{m-1}}) \geqq 0. \end{gathered}$$

Die Addition von (25) und (26) ergibt

(27) $$\mathfrak{k}^{(+)}(\lambda_{p_m}) - \mathfrak{k}^{(-)}(\lambda_{p_1}) \geqq E_{p_1} + \cdots + E_{p_m},$$

und diese Ungleichung lehrt, da $[\mathfrak{k}^{(-)}(\lambda)]$ nirgends negativ ist, wegen (24) die weitere Ungleichung

(28) $$E_{p_1} + \cdots + E_{p_m} \leqq (x, x).$$

Aus (23) und (28) erkennen wir, daß die über alle Indizes p erstreckte Summe $\Sigma[E_p]$ konvergiert, und zwar gegen eine quadratische Form der n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$, die $\leqq x_1^2 + \cdots + x_n^2$ ausfällt, d. h. es ist

$$\sum_{(p)} E_p \leqq (x, x).$$

Wir definieren jetzt folgende Formen der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$:

$$\mathfrak{e}(\lambda) = \sum_{(\lambda_p < \lambda)} E_p,$$

$$\eta(\lambda) = \sum_{(\lambda_p < \lambda)} E_p(\lambda - \lambda_p),$$

wo die Summen rechter Hand über alle diejenigen Indizes p zu erstrecken sind, für die $\lambda_p < \lambda$ ausfällt. Die Koeffizienten von $\eta(\lambda)$ sind stetige Funktionen von λ. Die Abschnitte $[\mathfrak{e}(\lambda)]$, $[\eta(\lambda)]$ dieser Formen sind Funktionen von λ, die, wie sich ohne Schwierigkeit mit Benutzung von (23) und der Konvergenz von $\sum_{(p)}[E_p]$ ergibt, folgende Eigenschaften besitzen:

$[\mathfrak{e}(\lambda)]$ ist nirgends negativ und nimmt mit wachsendem λ niemals ab; außerhalb J ist $[\mathfrak{e}(\lambda)]$ auf der negativen Seite Null, auf der positiven gleich $\sum_{(p)}[E_p]$.

$[\mathfrak{e}(\lambda)]$ ist an allen Stellen stetig, die nicht Eigenwerte sind; für den Eigenwert λ_p besitzt $[\mathfrak{e}(\lambda)]$ einen endlichen Sprung, und zwar ist bei positivem gegen Null abnehmendem τ:

$$\underset{\tau=0}{L}\,\mathfrak{e}(\lambda_p - \tau) = \mathfrak{e}(\lambda_p),$$

$$\underset{\tau=0}{L}\,\mathfrak{e}(\lambda_p + \tau) = \mathfrak{e}(\lambda_p) + E_p.$$

$[\eta(\lambda)]$ hat sowohl einen vorderen, wie einen hinteren Differentialquotienten; diese stimmen an allen Stellen, die nicht Eigenwerte sind, miteinander überein und haben den Wert $[\mathfrak{e}(\lambda)]$; für den Eigenwert λ_p ist der hintere Differentialquotient $[\mathfrak{e}(\lambda_p)]$, der vordere $[\mathfrak{e}(\lambda_p)] + [E_p]$, so daß der Überschuß des vorderen Differentialquotienten über den hinteren $[E_p]$ beträgt.

Aus (27) folgt, wenn λ', $\lambda'' > \lambda'$ keine Eigenwerte sind:

$$\mathfrak{k}(\lambda'') - \mathfrak{k}(\lambda') \geqq \sum_{(\lambda' < \lambda_p < \lambda'')} E_p;$$

nun ist

$$\sum_{(\lambda' < \lambda_p < \lambda'')} E_p = \mathfrak{e}(\lambda'') - \mathfrak{e}(\lambda')$$

und folglich auch

(29) $$\mathfrak{k}(\lambda'') - \mathfrak{k}(\lambda') \geqq \mathfrak{e}(\lambda'') - \mathfrak{e}(\lambda').$$

Ist eine der Größen λ', λ'' ein Eigenwert, bzw. sind beide Eigenwerte von K, so folgt ebenso statt (29) eine entsprechende Ungleichung. Setzen wir nun

$$\varrho(\lambda) = \varkappa(\lambda) - \eta(\lambda),$$

so besitzt mit Rücksicht auf (21) die Funktion $[\varrho(\lambda)]$ vordere und hintere Differentialquotienten, die für jede Stelle λ miteinander übereinstimmen, und dieser Differentialquotient ist überdies, wie aus (29) bzw. aus der entsprechenden Ungleichung folgt, eine mit wachsendem Argument nicht abnehmende Funktion von λ; daher stellt dieser Differentialquotient eine Funktion dar, die in λ stetig ist. Setzen wir also

(30) $$\sigma(\lambda) = \sum \sigma_{pq} x_p x_q = \frac{d\varrho(\lambda)}{d\lambda} = \mathfrak{k}(\lambda) - \mathfrak{e}(\lambda),$$

so ist jeder Abschnitt der Form $\sigma(\lambda)$ eine stetige, nicht negative, mit wachsendem λ nicht abnehmende Funktion von λ. Die Form $\sigma(\lambda)$ der unendlich vielen Variabeln, deren Koeffizienten σ_{pq} stetige Funktionen von λ sind, heiße die *Spektralform* von K.

Wegen (24) gilt die Ungleichung

(31) $$\sigma(\lambda) + \mathfrak{e}(\lambda) \leqq (x, x).$$

Die Formen $\mathfrak{k}(\lambda)$, $\mathfrak{e}(\lambda)$, $\sigma(\lambda)$ werden für alle außerhalb auf der negativen Seite von J liegenden Werte λ identisch gleich Null; auf der positiven Seite gehen sie in von λ unabhängige Formen über, die wir bzw. mit $\mathfrak{k}(+\infty)$, $\mathfrak{e}(+\infty)$, $\sigma(+\infty)$ bezeichnen wollen. Wegen (30) haben wir

(32) $$\sigma(+\infty) = \mathfrak{k}(+\infty) - \mathfrak{e}(+\infty).$$

Da $[\varkappa(\lambda)]$ rechts von J in $\lambda[[x, x)] + C(x)$ übergeht, so haben wir

(33) $$\mathfrak{k}(+\infty) = (x, x)$$

und, wie früher bemerkt ist,

$$\mathfrak{e}(+\infty) = \sum_{(p)} E_p.$$

Wir wählen jetzt solche reelle Werte λ aus, in deren beliebiger Nähe noch Punkte λ' existieren, für die nicht identisch in allen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$

$$\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda')$$

ausfällt. Die Menge s aller solchen Punkte λ ist perfekt (abgeschlossen und in sich dicht); sie heiße *das Streckenspektrum* oder *das kontinuierliche Spektrum* der Form K. Außerhalb der Verdichtungswerte von K sind die Koeffizienten von $\varkappa(\lambda)$ sämtlich linear in λ, diejenigen von $\mathfrak{e}(\lambda)$ konstant, und folglich werden auch die Koeffizienten von $\sigma(\lambda)$ konstant, d. h. das Streckenspektrum liegt gewiß innerhalb der Verdichtungswerte der Form K. Das Punktspektrum nebst den Häufungsstellen der Eigenwerte und das Streckenspektrum zusammengenommen heiße das *Spektrum* der Form K.

Setzen wir nun

$$\sigma(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) = \int_{(s)} d\sigma(\lambda),$$

so erhalten wir aus (32), (33)

$$(x, x) = \mathfrak{e}(+\infty) + \int_{(s)} d\sigma(\lambda)$$

oder

(34) $$(x, x) = \sum_{(p)} E_p + \int_{(s)} d\sigma(\lambda),$$

wo die Summe über alle p zu erstrecken ist.

Wir kehren nunmehr zu der quadratischen Form K_n mit endlicher Variabelnzahl n zurück. Bedeutet λ eine komplexe oder eine von sämtlichen Eigenwerten $\lambda_p^{(n)}$ der Form K_n verschiedene reelle Größe, so erhalten wir aus der Definition (11) der Funktion $\varkappa_p^{(n)}$ sofort die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa_p^{(n)}(\mu)}{(\mu-\lambda)^3}\, d\mu = (L_p^{(n)}(x))^2 \int_{\lambda_p^{(n)}}^{+\infty} \frac{\mu - \lambda_p^{(n)}}{(\mu-\lambda)^3}\, d\mu = \frac{1}{2}\, \frac{(L_p^{(n)}(x))^2}{\lambda_p^{(n)} - \lambda};$$

die Integration ist hier reell von $\mu = -\infty$ bis $\mu = +\infty$, im Falle eines reellen λ jedoch mit kurzer Umgehung des Punktes λ in der komplexen μ-Ebene auszuführen, wobei man beachte, daß $\varkappa_p^{(n)}(\mu)$ in der Umgebung des Punktes λ als lineare Funktion auch für komplexe μ definiert ist. Durch Summation über $p = 1, \ldots, n$ finden wir

$$(35) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa^{(n)}(\mu)}{(\mu-\lambda)^3}\, d\mu = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{\lambda_1^{(n)} - \lambda} + \cdots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{\lambda_n^{(n)} - \lambda} \right\},$$

wobei die Integration wie vorhin auszuführen ist. Andererseits ist, wie aus (3) und (5) folgt,

$$(36) \qquad \frac{\mathsf{K}_n(\lambda, x) - (x, x)_n}{\lambda} = \frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{\lambda_1^{(n)} - \lambda} + \cdots + \frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{\lambda_n^{(n)} - \lambda}.$$

Wenn wir in (35), (36) für n die besonderen Zahlen $m_1, m_2, \ldots$ einsetzen und auf beiden Seiten einen bestimmten Abschnitt nehmen, ferner unter λ irgendeine komplexe Größe oder eine solche reelle Größe verstehen, die nicht zum Spektrum der Form K gehört, so erhalten wir wegen (18) durch Grenzübergang die Formel

$$(37) \qquad \underset{h=\infty}{L} \frac{[\mathsf{K}_{m_h}(\lambda, x)] - [(x, x)_{m_h}]}{\lambda} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\varkappa(\mu)]}{(\mu-\lambda)^3}\, d\mu;$$

die Integration ist hier wiederum reell von $\mu = -\infty$ bis $\mu = +\infty$, im Falle eines reellen λ jedoch mit kurzer Umgehung des Punktes λ in der komplexen μ-Ebene auszuführen, wobei man beachte, daß $\varkappa(\mu)$ in der Umgebung des Punktes λ als lineare Funktion auch für komplexe μ definiert ist. Infolgedessen stellt das Integral rechter Hand eine Funktion von λ dar, die für alle komplexen und für die nicht zum Spektrum von K gehörigen reellen λ regulär analytischen Charakter in bezug auf λ besitzt.

Wir setzen

$$(38) \qquad \mathsf{K}(\lambda, x) = (x, x) + 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa(\mu)}{(\mu-\lambda)^3}\, d\mu$$

und nennen diesen Ausdruck *die Resolvente der Form K;* jeder Koeffizient oder Abschnitt derselben ist ebenfalls für alle komplexen und für die nicht zum Spektrum von K gehörigen endlichen reellen Werte von λ regulär analytisch, und man sieht auch, daß derselbe für $\lambda = \infty$ regulär analytisch ist.

Die oben gefundene Gleichung (37) geht über in

$$\underset{h=\infty}{L}\, \mathsf{K}_{m_h}(\lambda, x) = \mathsf{K}(\lambda, x).$$

Aus der Definition der Form $\eta(\lambda)$ entnehmen wir die Gleichung

$$(39) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\mu)}{(\mu-\lambda)^3}\, d\mu = \sum_{(p)} E_p \int_{\lambda_p}^{+\infty} \frac{\mu-\lambda_p}{(\mu-\lambda)^3}\, d\mu = \frac{1}{2} \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda},$$

wobei unter λ irgendeine komplexe Größe oder eine solche reelle Größe zu verstehen ist, die nicht zum Spektrum der Form K gehört, und die Integration nach μ im Falle eines reellen λ mit kurzer Umgehung des Punktes λ in der komplexen μ-Ebene ausgeführt werden soll.

Wegen

$$\varrho(\lambda) = \varkappa(\lambda) - \eta(\lambda),$$
$$\sigma(\lambda) = \frac{d\varrho(\lambda)}{d\lambda}$$

erhalten wir durch wiederholte Produktintegration und Einführung einer naturgemäßen Erweiterung des Integralbegriffes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa(\mu)}{(\mu-\lambda)^3}\, d\mu - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\mu)}{(\mu-\lambda)^3}\, d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho(\mu)}{(\mu-\lambda)^3} d\mu = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(\mu)}{(\mu-\lambda)^2}\, d\mu = \frac{1}{2} \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\lambda}.$$

Aus (38), (39) ergibt sich

$$(40) \qquad \mathsf{K}(\lambda, x) = (x, x) + \lambda \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} + \lambda \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda},$$

und hieraus mit Rücksicht auf (34)

$$\mathsf{K}(\lambda, x) = \sum_{(p)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Diese Formel ist das gesuchte Analogon zu der Partialbruchdarstellung (3) der Resolvente $\mathsf{K}_n(\lambda, x)$ der Form K_n mit der endlichen Variabelnzahl n.

Wir fassen die gefundenen Resultate in folgender Weise zusammen:

Satz 31: *Die Resolvente einer quadratischen Form K, für welche $\lambda = \infty$ nicht Verdichtungswert ist, ist eine quadratische Form mit unendlich vielen Variabeln*

$$\mathsf{K}(\lambda, x) = \sum_{p,q} \mathsf{K}_p(\lambda)_q x_p x_q,$$

deren Koeffizienten für alle außerhalb des Spektrums der Form K gelegenen Argumente λ regulär analytische Funktionen dieses Argumentes sind.

Ist $m_1, m_2, \ldots$ eine gewisse Reihe ins Unendliche zunehmender ganzer Zahlen, so gilt für jeden Abschnitt der Resolvente die Gleichung

$$(41) \qquad \underset{h=\infty}{L}\, \mathsf{K}_{m_h}(\lambda, x) = \mathsf{K}(\lambda, x),$$

wo K_{m_h} die Resolvente der Form K_{m_h} bedeutet.

Die Resolvente K *gestattet folgende Darstellung (für jeden Abschnitt)*

$$\mathsf{K}(\lambda, x) = \sum_{(p)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}; \tag{42}$$

dabei ist die Summe über das gesamte Punktspektrum von K, d. h. über alle Eigenwerte von K zu erstrecken; E_p bezeichnet allgemein die zu λ_p gehörige quadratische Eigenform; sie ist eine Form, deren Abschnitte für keinen Wert der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ negativ sind. Das Integral ist über das Streckenspektrum von K zu erstrecken. Die Spektralform $\sigma(\lambda)$ ist eine Form, deren Koeffizienten stetige Funktionen in λ, und deren Abschnitte bei wachsendem Argument λ innerhalb des Streckenspektrums s — von besonderen Werten der $x_1, x_2 \ldots$ abgesehen — wachsende Funktionen von λ, in jedem außerhalb s gelegenen Intervalle aber sämtlich konstant sind.

Endlich gilt die Gleichung (für jeden Abschnitt)

$$(x, x) = \sum_{(p)} E_p + \int_{(s)} d\sigma(\lambda). \tag{43}$$

Wenn die sämtlichen Abschnitte einer quadratischen oder einer bilinearen Form mit unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ absolut genommen unterhalb einer von der Wahl des Abschnittes unabhängigen endlichen Grenze liegen, sobald man die Variabeln den Bedingungen

$$(x, x) \leqq 1, \quad (y, y) \leqq 1 \tag{44}$$

unterwirft, so heiße die quadratische bzw. bilineare Form eine **beschränkte Form**.

Die zu einer beschränkten quadratischen Form gehörige bilineare Form ist ebenfalls eine beschränkte Form.

Beispielsweise sind wegen (23) und (28) die Eigenformen E_λ stets beschränkte Formen, und da nach (31) die Ungleichung

$$\sigma(\lambda) + \mathfrak{e}(\lambda) \leqq (x, x)$$

gilt, so sind auch die Spektralformen $\sigma(\lambda)$, ebenso wie die Formen $\mathfrak{f}(\lambda)$ und $\mathfrak{e}(\lambda)$ beschränkte Formen. Endlich ist, wenn λ einen außerhalb des Spektrums von $K(x)$ liegenden Wert bedeutet, die Resolvente $\mathsf{K}(\lambda, x)$, und zwar sowohl der Summen- wie der Integralbestandteil von $\mathsf{K}(\lambda, x)$ für sich, eine beschränkte Form.

Ein wichtiges spezielles Beipiel einer beschränkten quadratischen Form ist $\sum \frac{x_p x_q}{p+q}$.[1])

---

1) Die von mir gegebene und zuerst von H. Weyl (Inauguraldissertation, Göttingen 1908, S. 83) publizierte Beweisidee hierfür ist kurz folgende: Es gibt identisch in $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$

Die Begriffe „Abschnitt" und „beschränkt" können offenbar in gleichem Sinne auch für *lineare Formen* mit unendlich vielen Variabeln angewandt werden. Eine lineare Form

$$L(x) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots$$

ist dann und nur dann eine beschränkte Form, wenn die Summe der Quadrate ihrer Koeffizienten

$$l_1^2 + l_2^2 + \cdots$$

endlich bleibt.

Die Richtigkeit hiervon erkennt man leicht mit Hilfe der beiden folgenden Tatsachen:

I. Wenn $u_1, u_2, \ldots$ und $v_1, v_2, \ldots$ irgendwelche Größen sind, so gilt stets die Ungleichung

$$(u, v)^2 \leqq (u, u)(v, v).$$

II. Wenn $u_1, u_2, \ldots$ irgendwelche Größen sind, ferner M eine endliche positive Zahl bedeutet und überdies für alle der Bedingung (44) genügenden Werte $x_1, x_2, \ldots$ die Ungleichung

$$(u, x) \leqq M$$

stattfindet, so ist stets

$$(u, u) \leqq M^2.$$

Fortan ziehen wir durchweg nur solche Wertsysteme der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots y_1, y_2, \ldots$ u. s. f. in Betracht, die der Bedingung (44) genügen. Ist $a_1, a_2, \ldots$ ein solches Wertsystem, so existiert, wenn $L(x)$ eine beschränkte lineare Form ist, gewiß der Limes des $n$ten Abschnittes $[L(a)]_n$ derselben für $n = \infty$; wir setzen

$$L(a) = \underset{n=\infty}{L} [L(a)]_n;$$

somit haben wir erkannt, daß eine beschränkte Linearform der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ für alle in Betracht kommenden Wertsysteme

---

$$\sum_{(p,q=1,2,\ldots n)} x_p y_q \left\{\frac{1}{p+q} - \frac{1}{p-q}\right\} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{t}{\pi} \left[- x_1 \sin t + y_1 \cos t + x_2 \sin 2t - y_2 \cos 2t - \cdots\right]^2 dt,$$

wobei für $p = q$ anstatt $\frac{1}{p-q}$ linker Hand 0 zu nehmen ist. Die rechte Seite dieser Identität ergibt sich, indem wir unter dem Integral t vor der Klammer durch π ersetzen, durch kurze Rechnung kleiner als $\pi(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$, d. h. kleiner als 2π. Setzen wir $x_p = y_p$, so erhalten wir daher unmittelbar

$$\left| \sum_{(p,q=1,\ldots n)} \frac{x_p x_q}{p+q} \right| < 2\pi.$$

Andere Beweise sowie Erweiterungen dieses Satzes sind gegeben worden von F. Wiener (Math. Ann. Bd. 68, S. 361), J. Schur (Journ. f. Math. Bd. 140, S. 16), O. Toeplitz (Gött. Nachr. 1910, S. 489).

dieser Variabeln einen bestimmten endlichen Wert annimmt und demnach eine *Funktion* der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ darstellt.

Es heiße allgemein eine Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ an der Stelle $a_1, a_2, \ldots$ *stetig*, wenn der Wert von $F(a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \ldots)$ gegen den Wert von $F(a_1, a_2, \ldots)$ konvergiert, sobald die Summe der Quadrate der Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nach Null abnimmt, d. h. wenn

$$\underset{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots = 0)}{L} F(a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \ldots) = F(a_1, a_2, \ldots)$$

wird.

Wir sehen sofort, daß die beschränkte Linearform $L(x)$ eine stetige Funktion der unendlich vielen Variabeln darstellt.

Die entsprechenden Sätze gelten auch für eine *beschränkte Bilinearform.* Um dies zu erkennen, bezeichnen wir mit $A(x, y)$ eine beschränkte Bilinearform und mit $a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ besondere Wertsysteme der unendlich vielen Variabeln, sodann setzen wir

$$x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n, \; x_{n+1} = 0, \quad x_{n+2} = 0, \ldots$$

$$x_1' = 0, \ldots, x'_n = 0, \; x'_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\alpha_{nm}}, \; x'_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{\alpha_{nm}}, \ldots, x'_m = \frac{a_m}{\alpha_{nm}}, \; x'_{m+1} = 0, \; x'_{m+2} = 0, \ldots$$

$$y_1 = b_1, \ldots, y_n = b_n, \; y_{n+1} = 0, \quad y_{n+2} = 0, \ldots$$

$$y_1' = 0, \ldots, y'_n = 0, \; y'_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{\beta_{nm}}, \; y'_{n+2} = \frac{b_{n+2}}{\beta_{nm}}, \ldots, y'_m = \frac{b_m}{\beta_{nm}}, \; y'_{m+1} = 0, \; y'_{m+2} = 0, \ldots$$

$$\alpha_{nm} = \sqrt{a^2_{n+1} + a^2_{n+2} + \cdots + a^2_m}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{b^2_{n+1} + b^2_{n+2} + \cdots + b^2_m},$$

worin n und $m > n$ irgendwelche ganze Zahlen bedeuten. Nun ist, wenn wir mit $[A]_m$, $[A]_n$ die betreffenden Abschnitte von A bezeichnen,

$$\begin{aligned}[A(a, b)]_m &= A(x + \alpha_{nm}x', y + \beta_{nm}y'), \\ &= A(x, y) + \alpha_{nm}A(x', y) + \beta_{nm}A(x, y') + \alpha_{nm}\beta_{nm}A(x', y'), \\ &= [A(a, b)]_n + \alpha_{nm}A(x', y) + \beta_{nm}A(x, y') + \alpha_{nm}\beta_{nm}A(x', y').\end{aligned}$$

Da $A(x', y)$, $A(x, y')$, $A(x', y')$ absolut unterhalb einer von n, m unabhängigen Grenze bleiben und überdies α_{nm}, β_{nm} mit wachsenden n, m verschwinden, so folgt, daß $[A(a, b)]_n$ mit wachsendem n gegen einen Grenzwert konvergieren muß; derselbe werde kurz mit $A(a, b)$ bezeichnet. In analoger Weise folgt, daß die durch $A(x, y)$ dargestellte Funktion der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$ stetig ist.

Insbesondere schließen wir, daß auch eine beschränkte, quadratische Form unendlich vieler Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$ stets eine stetige Funktion derselben darstellt.

Wir entnehmen aus den eben bewiesenen Sätzen noch folgende Tatsache: Wenn auf beiden Seiten einer Formel eine endliche Anzahl

quadratischer oder bilinearer beschränkter Formen von unendlich vielen Variabeln steht und die durch die Formel dargestellte Gleichung oder Ungleichung für alle Abschnitte beider Seiten gültig ist, so ist sie überhaupt für alle Wertsysteme der unendlich vielen Variabeln gültig — wobei stets nur solche Wertsysteme dieser Variabeln gemeint sind, die den Bedingungen (44) genügen.

Wenn wir in der beschränkten Bilinearform $A(x, y)$ die Variabeln $y_1, y_2, \ldots$ sämtlich Null setzen mit alleiniger Ausnahme der einen Variabeln y_p, der wir den Wert 1 erteilen, so entsteht eine beschränkte Linearform der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$; dieselbe werde mit $\frac{\partial A(x, y)}{\partial y_p}$ bezeichnet.

Da $A(x, y)$ beschränkt ist, so folgt auch, daß für $n \geqq m$

$$y_1 \frac{\partial [A(x, y)]_n}{\partial y_1} + \cdots + y_m \frac{\partial [A(x, y)]_n}{\partial y_m}$$

absolut unter einer endlichen, von n und m unabhängigen Grenze liegt, und mit Rücksicht auf die oben angeführte Tatsache II liegt mithin auch

$$\left(\frac{\partial [A(x, y)]_n}{\partial y_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial [A(x, y)]_n}{\partial y_m}\right)^2$$

unterhalb einer von n und m unabhängigen Grenze. Nehmen wir nun zuerst $n = \infty$ und dann $m = \infty$, so erkennen wir, daß die Quadratsumme

$$\left(\frac{\partial A(x, y)}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial A(x, y)}{\partial y_2}\right)^2 + \cdots$$

gegen eine endliche Größe konvergiert. Ist nun $B(x, y)$ ebenfalls eine beschränkte Bilinearform, so bleibt auch die Quadratsumme

$$\left(\frac{\partial B(x, y)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial B(x, y)}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots$$

unterhalb einer endlichen Grenze, und folglich muß mit Rücksicht auf die oben angeführte Tatsache I auch die unendliche Reihe

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y_1} \frac{\partial B(x, y)}{\partial x_1} + \frac{\partial A(x, y)}{\partial y_2} \frac{\partial B(x, y)}{\partial x_2} + \cdots$$

absolut konvergieren; dieselbe stellt dann notwendig wiederum eine Bilinearform der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ dar, die wir analog wie oben bei endlichen Formen mit

$$A(x, .) B(., y)$$

bezeichnen und die *Faltung* der Bilinearformen A, B nennen.

Die Faltung ist gewiß eine beschränkte Bilinearform, und zwar erkennen wir mit Rücksicht auf die oben angeführten Tatsachen I und II aus der vorangehenden Betrachtung die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Hilfssatz 2. Wenn M, N zwei positive Konstanten bedeuten, so daß für alle $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$

$$|A(x,y)| \leqq M, \quad |B(x,y)| \leqq N$$

ausfällt, so genügt die Faltung notwendig der Ungleichung

$$|A(x,.)B(.,y)| \leqq MN.$$

Zugleich stellen wir folgende Hilfssätze auf, deren Richtigkeit unmittelbar einleuchtet.

Hilfssatz 3. Für jeden Abschnitt der Faltung zweier beschränkter Bilinearformen A, B gilt

$$[A(x,.)B(.,y)]_m = \underset{n=\infty}{L}\, [A_n(x,.)B_n(.,y)]_m,$$

wo rechts unter dem Limes der $m$te Abschnitt der Faltung der $n$ten Abschnitte von A, B steht. Der Wert der Faltung ist demnach:

$$A(x,.)B(.,y) = \underset{m=\infty}{L}\ \underset{n=\infty}{L}\, [A_n(x,.)B_n(.,y)]_m.$$

Es folgt daraus insbesondere:

$$A(x,.)(.,y) = A(x,y),$$

d. h. jede Bilinearform reproduziert sich durch Faltung mit (x, y); wir können daher auch den Wert der Bilinearform darstellen als:

$$A(x,y) = y_1 \frac{\partial A}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial A}{\partial y_2} + \cdots = x_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial A}{\partial x_2} + \cdots.$$

Hilfssatz 4. Wenn A, B, C, ... beschränkte Bilinearformen sind und mit denselben wiederholt der Prozeß der Faltung ausgeführt wird, so ist das Resultat von der Reihenfolge der einzelnen Faltungen unabhängig; es ist beispielsweise

$$(A(x,.)B(.,.))C(.,y) = A(x,.)(B(.,.)C(.,y)).$$

Wir entwickeln nunmehr die einfachsten Begriffe und Tatsachen über *orthogonale Transformationen* unendlich vieler Variabler.

Bedeuten

$$o_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

irgendwelche unendlich viele, den Relationen

$$\sum_{(q=1,2,\ldots)} o_{pq}^2 = 1,$$

$$\sum_{(r=1,2,\ldots)} o_{pr} o_{qr} = 0 \qquad (p + q)$$

und

$$\sum_{(p=1,2,\ldots)} o_{pq}^2 = 1,$$

$$\sum_{(r=1,2,\ldots)} o_{rp} o_{rq} = 0 \qquad (p + q)$$

genügende Konstanten, so definieren die Formeln

$$(45)\qquad \begin{aligned} x_1 &= o_{11}x'_1 + o_{12}x'_2 + \cdots,\\ x_2 &= o_{21}x'_1 + o_{22}x'_2 + \cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x'_1 &= o_{11}x_1 + o_{21}x_2 + \cdots,\\ x'_2 &= o_{12}x_1 + o_{22}x_2 + \ldots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

je eine orthogonale Transformation; die letztere Transformation ist die Umkehrung der ersteren. Die Ausdrücke rechter Hand sind beschränkte Linearformen der unendlich vielen Variabeln $x_1', x_2', \ldots$ bzw. $x_1, x_2, \ldots$.

Die Bilinearform
$$O(x, x') = \sum o_{pq} x_p x_q'$$
heiße die zur orthogonalen Transformation (45) zugehörige Bilinearform; dieselbe ist, wie man leicht aus der oben angeführten Tatsache I erkennt, gewiß eine beschränkte Form. Es gelten nach Hilfssatz 3 die Formeln

$$(46)\qquad O(.,x)O(.,y) = (x, y), \quad O(.,x)O(.,y) = (x, y);$$

insbesondere wird:

$$\sum_{(p)}(o_{p1}x'_1 + o_{p2}x'_2 + \cdots)^2 = (x', x'),$$
$$\sum_{(p)}(o_{1p}x_1 + o_{2p}x_2 + \cdots)^2 = (x, x).$$

Wenn wir auf irgendeine beschränkte Linearform $L(x)$ die orthogonale Transformation (45) anwenden, so entsteht die Linearform
$$L'(x') = L(.)O(., x');$$
mithin entsteht, wenn wir beide Variabelnreihen irgendeiner beschränkten Bilinearform $A(x, y)$ jener Transformation unterwerfen, die Bilinearform
$$A'(x', y') = A(.,.)O(., x')O(., y').$$

Sind $A(x, y)$, $B(x, y)$ irgend zwei beschränkte Bilinearformen, setzen wir ferner
$$C(x, y) = A(x, .)B(., y)$$
und berechnen die orthogonal transformierten Formen
$$\begin{aligned} A'(x', y') &= A(.,.)O(., x')O(., y'),\\ B'(x', y') &= B(_\circ, _*)O(_\circ, x')O(_*, y'),\\ C'(x', y') &= C(.,.)O(., x')O(., y'), \end{aligned}$$
so finden wir als Faltung der transformierten Formen
$$A'(x, _\circ)B'(_\circ, y) = A(.,.)O(., x)O(., _\circ)B_*(, _*)O(_*, _\circ)O(_*, y)$$
und mit Benutzung des Hilfssatzes 3 und 4 und der Formel (46)
$$A'(x, _\circ)B'(_\circ, y) = A(., _\circ)B(_\circ, _*)O(., x)O(_*, y) = C(., _*)O(., x)O(_*, y)$$
und mithin

$$(47)\qquad A'(x, .)B'(., y) = C'(x, y)$$

d. h. die Faltung zweier Bilinearformen ist eine Kovariante gegenüber einer orthogonalen Transformation.

Wenn die Summe der Koeffizienten von $x_p y_p$ einer Bilinearform $A(x, y)$ konvergiert, so bezeichnen wir diese Summe allgemein wie bei endlichen Formen mit $A(.,.)$.

Wir erwähnen hier noch folgende ebenfalls leicht zu beweisende Tatsache:

Hilfssatz 5. Wenn

$$K(x) = \sum_{(p, q = 1, 2, \ldots)} k_{pq} x_p x_q$$

eine quadratische Form von solcher Art ist, daß

$$K(.,.)K(.,.) = \sum_{(p, q = 1, 2, \ldots)} k^2_{pq}$$

gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, so stellt derselbe eine Invariante gegenüber einer orthogonalen Transformation von $K(x)$ dar; d. h. jener Grenzwert stimmt mit

$$K'(.,.)K'(.,.) = \sum_{(p, q = 1, 2, \ldots)} k'^2_{pq}$$

überein, wobei

$$K'(x') = \sum_{(p, q = 1, 2, \ldots)} k'_{pq} x'_p x'_q$$

die durch orthogonale Transformation aus $K(x)$ hervorgehende quadratische Form bedeutet.

Wir kehren nunmehr zu der oben entwickelten Theorie der quadratischen Form $K(x)$ zurück und nehmen an, daß diese quadratische Form $K(x)$ eine beschränkte Form sei.

Bedeutet wiederum

$$K_n(x) = [K(x)]_n$$

den $n$ten Abschnitt von $K(x)$, so ist der größte Wert, den $K_n(x)$ absolut genommen annimmt, gleich $\frac{1}{|\lambda_1^{(n)}|}$, wenn $\lambda_1^{(n)}$ den absolut kleinsten der n Eigenwerte von $K_n(x)$ bezeichnet. Da $K(x)$ eine beschränkte Form sein soll, so gibt es eine positive Konstante M, so daß für alle Werte n und jedes Variabelnsystem

$$|K_n(x)| \leqq M$$

ausfällt, und mithin gilt auch

$$\left|\frac{1}{\lambda_1^{(n)}}\right| \leqq M$$

oder

$$|\lambda_1^{(n)}| \geqq \frac{1}{M},$$

d. h. die absoluten Beträge der Eigenwerte von $K_n(x)$ bleiben sämtlich oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Größe, und es gehört

somit $\lambda = 0$ gewiß nicht zum Spektrum von $K(x)$. Nehmen wir umgekehrt von einer quadratischen Form $K(x)$ an, daß $\lambda = 0$ nicht zu ihrem Spektrum gehöre, so müssen sämtliche Eigenwerte $\lambda_h^{(n)}$ ihrer Abschnitte $K_n(x)$ von einem gewissen n an absolut genommen oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Grenze m bleiben, und hieraus wiederum folgt, daß die Maxima $\frac{1}{|\lambda_1^{(n)}|}$ der absolut genommenen Abschnitte $K_n(x)$ unterhalb der Grenze $\frac{1}{m}$ bleiben müssen, d. h. die Form $K(x)$ ist notwendig eine beschränkte.

Die soeben gemachte und im folgenden stets beibehaltene Annahme, daß $K(x)$ eine beschränkte Form sei, ist also damit völlig äquivalent, daß $\lambda = 0$ nicht zum Spektrum von $K(x)$ gehöre, während die absoluten Beträge der Eigenwerte von $K(x)$ sehr wohl über alle Grenzen wachsen dürfen.

Wir bestimmen nun eine Größe α so klein, daß auch $\lambda = \alpha$ nicht dem Spektrum von $K(x)$ angehört. Da dann die Nullstellen der Diskriminanten der Abschnitte von

$$(x, x) - \lambda K(x)$$

sich an der Stelle $\lambda = \alpha$ nicht häufen, so werden diejenigen der Abschnitte von

$$(x, x) - \lambda \{(x, x) - \alpha K(x)\}$$

absolut genommen nicht über alle Grenzen wachsen, d. h. die quadratische Form

$$K^*(x) = (x, x) - \alpha K(x)$$

hat $\lambda = \infty$ nicht zum Verdichtungswert; diese ist zugleich auch beschränkt. Bezeichnen wir mit $\mathsf{K}_n(\lambda; x, y)$ die Resolvente von $K_n(x)$ und mit $\mathsf{K}^*_n(\lambda; x, y)$ diejenige von $K^*_n(x)$, so finden wir unmittelbar aus der Definition der Resolvente die Gleichung:

$$\mathsf{K}_n(\lambda; x, y) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\alpha}} \mathsf{K}_n^* \left(\frac{\lambda}{\lambda - \alpha}; x, y\right). \tag{48}$$

Wenden wir nun unseren Satz I auf die Form $K^*(x)$ an und bezeichnen die Eigenwerte, Eigenformen, ferner das Streckenspektrum und die Spektralform von $K^*(x)$ bzw. mit

$$\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \quad E_1^*, E_2^*, \ldots, s^*, \sigma^*,$$

so ergibt sich für alle außerhalb des Spektrums von K^* liegenden Werte von λ^* die für jeden Abschnitt bestehende Gleichung

$$\underset{h=\infty}{L} \mathsf{K}^*_{m_h}(\lambda^*, x) = \sum_{(p)} \frac{E_p^*}{1 - \frac{\lambda^*}{\lambda_p^*}} + \int_{(s^*)} \frac{d\sigma^*(\mu^*)}{1 - \frac{\lambda^*}{\mu^*}} \tag{49}$$

und ebenso

$$(x, x) = \sum_{(p)} E_p^* + \int_{(s^*)} d\sigma^*(\lambda^*).$$

Setzen wir in (49)

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda - \alpha}, \qquad \lambda_p^* = \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \alpha}, \qquad \mu^* = \frac{\mu}{\mu - \alpha}$$

ein, wobei

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda^*}{\lambda_p^*}} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\alpha}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}},$$

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda^*}{\mu^*}} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\alpha}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

wird, und bezeichnen mit s die Menge der Punkte μ, die der Menge s^* der Punkte μ^* entspricht, so ergibt sich mit Rücksicht auf (48) die für jeden Abschnitt bestehende Gleichung:

$$\underset{h=\infty}{L}\, \mathsf{K}_{m_h}(\lambda, x) = \sum_{(p, \infty)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}};$$

dabei sind dann λ_p als die Eigenwerte, $E_p = E_p^*$ als die zugehörigen Eigenformen, s als das Streckenspektrum, $\sigma(\mu) = \sigma^*(\mu^*)$ als die Spektralform von $K(x)$ zu bezeichnen, und es ist $\lambda = \infty$ als Eigenwert, E_∞ als zugehörige Eigenfunktion von $K(x)$ mitzurechnen, falls $\lambda^* = 1$ Eigenwert von $K^*(x)$ war. Aus der obigen Formel für (x, x) wird

(50) $$(x, x) = \sum_{(p, \infty)} E_p + \int_{(s)} d\sigma(\lambda).$$

Die beiden letzten Formeln stimmen mit (42), (43) überein, wenn $K(x)$ nicht $\lambda = \infty$ zum Verdichtungswert hat; in der Tat folgt dann aus der Definition von $K^*(x)$, daß $\lambda^* = 1$ nicht Verdichtungswert und daher auch nicht Eigenwert von K^* ist; demnach ist $\lambda = \infty$ gewiß nicht Eigenwert von $K(x)$.

Bleibt $K(x, y)$ für alle Variabeln x absolut unterhalb der endlichen Grenze M, so entnehmen wir aus (2) und Hilfssatz 2, daß auch für alle m

$$\mathsf{K}_m(\lambda; x, y) = (x, y)_m + \lambda K_m(x, y) + \lambda^2 K_m K_m(x, y) + \cdots + \lambda^n K_m K_m \ldots K_m(x, y) + \frac{\vartheta_n (\lambda M)^{n+1}}{1 - \lambda M}$$

gilt, wo

$$n < m, \; |\lambda| < \frac{1}{M}, \; -1 < \vartheta_n < +1$$

ist. Mit Rücksicht auf Hilfssatz 3 erhalten wir dann, wenn wir für x, y solche feste Werte nehmen, die von einem endlichen Index an sämtlich verschwinden, für $m = m_h$ in der Grenze $h = \infty$ die Formel

$$(51)\quad \underset{h=\infty}{L}\, \mathsf{K}_{m_h}(\lambda; x, y) = (x, y) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 KK(x, y) + \cdots + \lambda^n KK \ldots K(x, y) + \frac{\vartheta_n (\lambda M)^{n+1}}{1 - \lambda M},$$

und hieraus für $n = \infty$

$$\underset{h=\infty}{L}\, \mathsf{K}_{m_h}(\lambda; x, y) = (xy) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 KK(x, y) + \cdots.$$

Die so gewonnene Formel sowie die Tatsache, daß jeder Abschnitt der Resolvente außerhalb des Spektrums regulär analytisch in λ ist, zeigt, daß die Resolvente

$$\mathsf{K}(\lambda; x, y) = \underset{h=\infty}{L}\, \mathsf{K}_{m_h}(\lambda; x, y)$$

der Form $K(x, y)$ eindeutig durch $K(x)$ bestimmt ist, und hieraus wiederum folgt, indem wir auf den Beweis für die Existenz des Grenzwertes

$$\underset{h=\infty}{L}\, \mathsf{K}_{m_h}(\lambda; x, y)$$

zurückgreifen, daß auch allgemein der Grenzwert

$$\underset{m=\infty}{L}\, \mathsf{K}_{m}(\lambda; x, y)$$

existiert und dem obigen Grenzwert gleich sein muß. Die letzten Formeln gelten stets für jeden Abschnitt der in Betracht kommenden Formen.

Aus (51) schließen wir, daß die Differenz

$$(52)\quad \mathsf{K}(\lambda; x, y) - \{(x, y) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 KK(x, y) + \cdots + \lambda^n KK \ldots K(x, y)\}$$

eine Form ist, bei welcher der absolute Betrag jedes Abschnittes für $|\lambda| < \frac{1}{M}$ unterhalb der Größe

$$\frac{|\lambda M|^{n+1}}{1 - |\lambda M|}$$

bleibt. Durch Faltung jenes Ausdruckes (52) mit $K(x, y)$ ergibt sich dann nach Hilfssatz 2, daß der Ausdruck

$$(53)\quad K(x, .)\mathsf{K}(\lambda; ., y) - \{K(x, y) + \lambda KK(x, y) + \lambda^2 KKK(x, y) + \cdots + \lambda^n KKK \ldots K(x, y)\}$$

absolut genommen im gleichen Sinne die Größe

$$M \frac{|\lambda M|^{n+1}}{1 - |\lambda M|}$$

nicht überschreitet. Setzen wir in (52) die Zahl $n + 1$ an Stelle von n und subtrahieren dann davon das λ-fache des Ausdruckes (53), so entsteht der Ausdruck

$$\mathsf{K}(\lambda; x, y) - \lambda K(x, .)\mathsf{K}(\lambda; ., y) - (x, y),$$

und dieser Ausdruck bleibt demnach absolut genommen unterhalb der Größe

$$\frac{2|\lambda M|^{n+2}}{1 - |\lambda M|}.$$

Da nun diese Größe für $n = \infty$ gegen Null konvergiert, so ist damit die Gültigkeit der Gleichung

$$\mathsf{K}(\lambda; x, y) - \lambda K(x, .)\mathsf{K}(\lambda; ., y) = (x, y) \tag{54}$$

für $|\lambda| < \frac{1}{M}$ und für jeden Abschnitt, und einer oben gemachten Bemerkung (S. 127) zufolge daher auch für beliebige Werte der unendlich vielen Variabeln bewiesen.

Wir sind vorhin zu der Gleichung

$$\mathsf{K}(\lambda; x, y) = (x, y) + \lambda K(x, y) + \lambda^2 KK(x, y) + \cdots \tag{55}$$

gelangt und haben die Gültigkeit derselben für jeden Abschnitt und für $|\lambda| < \frac{1}{M}$ erkannt. Aus diesem Umstande wiederum schließen wir, daß für beliebige Werte der Variabeln und $|\lambda| < \frac{1}{M}$ jeder Abschnitt von

$$\mathsf{K}(\lambda; x, y) - \{(x, y) + \lambda K(x, y) + \cdots + \lambda^n KK \ldots K(x, y)\} \tag{56}$$

absolut kleiner als

$$\frac{|\lambda M|^{n+1}}{1 - |\lambda M|} \tag{57}$$

ausfällt, und daher muß einer oben (S. 127) gemachten Bemerkung zufolge auch jener Ausdruck (56) selbst für beliebige Werte der unendlich vielen Variabeln absolut kleiner oder gleich der Größe (57) bleiben. Hieraus folgt, indem wir n ins Unendliche zunehmen lassen, daß die Gleichung (55) für beliebige Werte der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$ und für $|\lambda| < \frac{1}{M}$ gültig ist.

Die Gleichung

$$\mathsf{K}(\lambda, x) = \sum_{(p, \infty)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \tag{58}$$

ist — ebenso wie (50) — vorhin nur in dem Sinne als gültig erkannt worden, daß man darin auf beiden Seiten die nämlichen Abschnitte genommen denkt; wir wollen nun zeigen, daß diese Gleichung für beliebige Werte der unendlich vielen Variabeln gilt — vorausgesetzt, daß λ einen außerhalb des Spektrums von K gelegenen Wert bedeutet.

Es sei $a_1, a_2, \ldots$ ein bestimmtes Wertsystem der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$; dann bezeichne

$$E_p(a), \; [E_p(a)]_n, \; [E_p(a)]_m$$

den Wert, den E_p bzw. der $n$te und $m$te Abschnitt von E_p für jenes bestimmte Wertsystem annimmt. Wegen (50) liegt

$$\sum_{(p = 1, \ldots, P)} [E_p(a)]_n$$

unterhalb der von n und P unabhängigen endlichen Grenze (a, a); wir setzen

$$\sum_{(p=P+1, P+2, \ldots)} [E_p(a)]_n = \varepsilon(n, P),$$

wo $\varepsilon(n, P)$ eine Größe ist, die bei festem n für $P = \infty$ nach Null konvergiert. Da bei festem, außerhalb des Spektrums gelegenen λ die Größen

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} \right|$$

sämtlich eine endliche obere Grenze G haben, so ist, wenn

$$\sum_{(p=P+1, P+2, \ldots)} \frac{[E_p(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} = \eta(n, P)$$

gesetzt wird, die Größe $\eta(n, P)$ ebenfalls eine solche, die bei festem n für $P = \infty$ nach Null konvergiert.

Da andererseits

$$\sum_{(p=1, \ldots, P)} \frac{E_p(x)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}}$$

eine beschränkte Form ist, und zwar derart, daß die absoluten Beträge ihrer Werte sämtlich unterhalb der von P unabhängigen Grenze G bleiben, so folgt aus unseren früheren Betrachtungen (S. 127), daß

$$\sum_{(p=1, \ldots, P)} \frac{[E_p(a)]_m}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} - \sum_{\substack{(p=1, \ldots, P) \\ (m > n)}} \frac{[E_p(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}} = (G)\sqrt{a^2_{n+1} + a^2_{n+2} + \cdots + a^2_m},$$

wird, worin (G) eine zwischen endlichen von n, m, P unabhängigen Grenzen gelegene Größe bedeutet.

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\sum_{(p=1, \ldots, P)} \frac{[E_p(a)]_m}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} = \sum_{(p=1, 2 \ldots)} \frac{[E_p(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + (G)\sqrt{a^2_{n+1} + a^2_{n+2} + \cdots + a^2_m} + \eta(n, P),$$

und wenn wir hierin zuerst $m = \infty$ und zuletzt $n = \infty$ werden lassen, so erhalten wir

$$\sum_{(p=1, 2, \ldots)} \frac{E_p(a)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} = \underset{n=\infty}{L} \sum_{(p=1, 2, \ldots)} \frac{[E_p(a)]_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}}.$$

Andererseits wenden wir die oben (S. 127) zum Beweise der Konvergenz von $A(a, b)$ dargelegte Schlußweise auf die Bilinearform $\sigma(\lambda; x, y)$ an. Da mit Rücksicht auf (31)

$$[\sigma(\mu; x, y)] \leq 1$$

folgt und mithin für alle Werte von μ bei beliebigen $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$

$$\sigma(\mu; x, y) \leq 1$$

sein muß, so folgt durch jene Schlußweise zugleich in bezug auf alle μ die Gleichmäßigkeit der Konvergenz von $[\sigma(\mu; x, y)]_n$ gegen $\sigma(\mu; x, y)$; mithin stellt die Bilinearform $\sigma(\mu; x, y)$ für jedes Wertsystem der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$ eine stetige Funktion von μ dar, und hieraus wiederum folgt

$$\int\limits_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \underset{n=\infty}{L} \left[\int\limits_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \right]_n .$$

Mit den beiden letzteren Limesgleichungen ist unsere Behauptung erwiesen, d. h. die Gültigkeit der Partialbruchdarstellung von $\mathsf{K}(\lambda; x)$ auf beliebige Werte der unendlich vielen Variabeln erweitert.

Die soeben als allgemeingültig erwiesene Partialbruchdarstellung von $\mathsf{K}(\lambda; x)$ läßt zugleich erkennen, daß der Wert der Resolvente $\mathsf{K}(\lambda, x)$ für jedes beliebige System der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ eine in λ außerhalb des Spektrums regulär analytische Funktion ist.

Setzen wir in $\mathsf{K}(\lambda; x, y)$ allgemein an Stelle von x_p den Ausdruck $\frac{\partial K(x, y)}{\partial y_p}$, so entsteht die Faltung:

$$K(x, .)\,\mathsf{K}(\lambda; ., y),$$

und daher stellt auch diese für jedes Wertsystem der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$ eine in λ außerhalb des Spektrums regulär analytische Funktion dar.

Aus diesen Tatsachen folgern wir die Gültigkeit der Gleichung (54) nicht nur für beliebige Wertsysteme der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$, sondern auch für alle außerhalb des Spektrums liegenden Werte von λ.

Wir fassen die wichtigsten der gewonnenen Resultate, wie folgt, zusammen:

Satz 32. *Es sei $K(x)$ eine beschränkte quadratische Form der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$. Die Resolvente $\mathsf{K}(\lambda; x)$ vom $K(x)$ ist eine eindeutig bestimmte quadratische Form eben dieser Variabeln $x_1, x_2, \ldots$*

$$\mathsf{K}(\lambda, x) = \sum_{(p, q)} \mathsf{K}_{pq}(\lambda) x_p x_q,$$

deren Koeffizienten $\mathsf{K}_{pq}(\lambda)$ für alle außerhalb des Spektrums von K gelegenen Werte λ regulär analytische Funktionen von λ sind.

Die Resolvente $\mathsf{K}(\lambda; x)$ ist, wenn λ einen außerhalb des Spektrums von K gelegenen Wert bedeutet, eine beschränkte Form; sie stellt für jedes be-

liebige Wertsystem der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ eine analytische Funktion von λ dar.

Die Resolvente $\mathsf{K}(\lambda, x)$ gestattet für beliebige Werte der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ und für genügend kleine Werte von λ die Potenzreihenentwicklung

$$\mathsf{K}(\lambda, x) = (x, x) + \lambda K(x) + \lambda^2 KK(x) + \cdots, \tag{59}$$

und ferner gilt ebenfalls für beliebige Werte der unendlich vielen Variabeln und überhaupt für alle außerhalb des Spektrums von K gelegenen Werte λ die Partialbruchdarstellung

$$\mathsf{K}(\lambda, x) = \sum_{(p,\infty)} \frac{E_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}. \tag{60}$$

Dabei ist die Summe über das gesamte Punktspektrum von K, d. h. über alle Eigenwerte eventuell mit Einschluß des Eigenwertes ∞ zu erstrecken; E_p bezeichnet allgemein die zu λ_p gehörige quadratische Eigenform; sie ist eine beschränkte Form, die für kein Wertsystem der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ negativ ausfällt. Die Spektralform $\sigma(\lambda)$ ist eine beschränkte Form der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$, und zwar stellt sie für jedes Wertsystem derselben in bezug auf λ eine Funktion dar, die stetig ist und bei wachsendem λ innerhalb des Streckenspektrums s — von besonderen Werten der $x_1, x_2, \ldots$ abgesehen — wächst, in jedem außerhalb s gelegenen Intervalle aber konstant bleibt.

Insbesondere gelten die Gleichungen

$$(x, x) = \sum_{(p,\infty)} E_p + \int_{(s)} d\sigma(\lambda), \tag{61}$$

$$K(x) = \sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu}. \tag{62}$$

Die Resolvente $\mathsf{K}(\lambda, x)$ ist mit $K(x)$ durch die Relation

$$\mathsf{K}(\lambda; x, y) - \lambda K(x, .)\mathsf{K}(\lambda; ., y) = (x, y) \tag{63}$$

verknüpft, die für alle außerhalb des Spektrums von K liegenden Werte von λ gültig ist.

Setzen wir

$$\mathsf{K}(\lambda; x, y) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ gewisse lineare Funktionen von $y_1, y_2, \ldots$ mit konvergenter Quadratsumme sind, so folgt aus (63) durch Gleichsetzung der Koeffizienten von x_p:

$$\alpha_p - \lambda \sum_{(q)} k_{pq}\alpha_q = y_p \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

d. h. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ lösen diese inhomogenen, aus der quadratischen Form $(x, x) - \lambda K(x)$ (wo λ außerhalb des Spektrums liegt) entspringenden unendlich vielen Gleichungen, wenn $y_1, y_2, \ldots$ irgendwelche Größen mit konvergenter Quadratsumme sind; sie sind die einzige Lösung mit konvergenter Quadratsumme. —

Wir wollen nunmehr das Verhalten der Resolvente $\mathsf{K}(\lambda, x)$ für einen innerhalb des Spektrums von K liegenden Wert von λ untersuchen.

Zu dem Zwecke setzen wir

$$\lambda = \nu + i\nu',$$

wo ν, ν' reelle Zahlen bedeuten, und fragen, ob das Produkt

$$(\nu - \lambda)\left\{\sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda}\right\}$$

für $\nu' = 0$ einem Grenzwerte zustrebt.

Es sei zunächst ν eine Verdichtungsstelle der Eigenwerte von $K(x)$, aber nicht gleich einem Eigenwerte von $K(x)$; dann setzen wir

$$\sum_{(p)} E_p = E_1 + \cdots + E_m + R_m$$

und bezeichnen mit ν_m denjenigen unter den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, der dem Werte ν am nächsten liegt. Nehmen wir nunmehr m so groß, daß gerade noch

$$\nu' \leqq (\nu - \nu_m)^2$$

ist, so wird

$$\text{für } p \leqq m \quad \left|\frac{\nu - \lambda}{\lambda_p - \lambda}\right| \leqq \left|\frac{\nu'}{\lambda_p - \nu}\right| \leqq \frac{\nu'}{|\nu_m - \nu|} \leqq \sqrt{\nu'}$$

$$\text{und für } p \geqq m \text{ gewiß } \left|\frac{\nu - \lambda}{\lambda_p - \lambda}\right| \leqq 1$$

und daher auch

$$\left|(\nu - \lambda)\sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda}\right| \leqq \sqrt{\nu'}\,(E_1 + \cdots + E_m) + R_m \leqq \sqrt{\nu'} + R_m.$$

Da nun für $\nu' = 0$ notwendig m über alle Grenzen wächst und daher R_m gegen Null konvergiert, so folgt

$$\underset{\nu'=0}{L}\left\{(\nu - \lambda)\sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda}\right\} = 0. \tag{64}$$

Die letztere Grenzgleichung gilt gewiß auch, wenn ν weder Verdichtungsstelle der Eigenwerte von $K(x)$ noch selbst gleich einem Eigenwert ist.

Aus diesen Tatsachen entnehmen wir andererseits, daß, wenn ν dem Eigenwerte λ_p gleich ist, stets notwendig

$$\underset{\nu'=0}{L}\left\{(\lambda_p - \lambda)\sum_{(p)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda}\right\} = E_p \tag{65}$$

ausfällt.

Es sei jetzt ν ein Punkt des Streckenspektrums s und μ' eine reelle Zahl $> \nu$. Nehmen wir alsdann

$$\nu' = (\nu - \mu')^2,$$

so erhalten wir durch eine ähnliche Abschätzung des bis μ' erstreckten Integrales

$$(66) \qquad \underset{\nu'=0}{L}\left\{(\nu - \lambda)\int\limits_{\sigma(\nu)}^{\sigma(+\infty)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda}\right\} = 0.$$

Ebenso folgt auch

$$(67) \qquad \underset{\nu'=0}{L}\left\{(\nu - \lambda)\int\limits_{\sigma(-\infty)}^{\sigma(\nu)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda}\right\} = 0.$$

Wegen

$$\mathsf{K}(\lambda, x) = (x, x) + \lambda\left\{\sum_{(p,\infty)} \frac{E_p}{\lambda_p - \lambda} + \int\limits_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda}\right\}$$

folgt aus (64), (65), (66), (67), daß

$$(68) \qquad \underset{\nu'=0}{L}(\nu - \lambda)\mathsf{K}(\lambda, x) = 0 \quad \text{bzw.} = \lambda_p E_p$$

ist, je nachdem ν keiner der Eigenwerte von $K(x)$ ist bzw. dem Eigenwert λ_p gleich wird.

Als Ergänzung hierzu tritt, wenn

$$\lambda = i\nu'$$

gesetzt wird, die Grenzgleichung

$$(69) \qquad \underset{\nu'=\infty}{L}\mathsf{K}(\lambda, x) = 0 \quad \text{bzw.} = E_\infty,$$

je nachdem $\lambda = \infty$ kein Eigenwert ist oder als solcher gerechnet werden muß. Um dies einzusehen, dienen die analogen Überlegungen wie vorhin: man nehme bei der Untersuchung der Summe m so groß, daß gerade noch $\nu' > \nu_m^2$, wenn ν_m den absolut größten der Eigenwerte $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ bedeutet, und nehme bei der Untersuchung des Integrals $\nu' = \mu'^2$.

Bedeutet μ irgendeinen außerhalb das Spektrums von K liegenden Wert, so folgt aus (63) durch Faltung mit $\mathsf{K}(\mu; x, y)$

$$\lambda K(.,.)\,\mathsf{K}(\lambda; ., x)\,\mathsf{K}(\mu; .\,y) = \mathsf{K}(\lambda; ., x)\,\mathsf{K}(\mu; ., y) - \mathsf{K}(\mu; x, y).$$

Aus dieser Formel und derjenigen, welche aus ihr durch gleichzeitige Vertauschung von $\lambda; x_1, x_2, \ldots$ mit $\mu; y_1, y_2, \ldots$ entsteht, finden wir die Formel

$$(70) \qquad (\lambda - \mu)\mathsf{K}(\lambda; x, .)\mathsf{K}(\mu; y, .) = \lambda\mathsf{K}(\lambda; x, y) - \mu\mathsf{K}(\mu; x, y).$$

Bedenken wir nun, daß die Faltung

$$\mathsf{K}(\lambda; x, .)\,\mathsf{K}(\mu; ., y)$$

denjenigen Ausdruck bedeutet, der entsteht, wenn wir in $\mathsf{K}(\lambda; x, y)$ an Stelle der Variabeln $y_1, y_2, \ldots$ bzw. die Werte

$$\frac{\partial \mathsf{K}(\mu; x, y)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \mathsf{K}(\mu; x, y)}{\partial x_2}, \ldots$$

eintragen, so erkennen wir aus (68), daß bei festgehaltenem μ und für $\lambda = \lambda_p + i\nu'$ die Limesgleichung

$$\text{(71)} \qquad \underset{\nu'=0}{L}(\lambda_p - \lambda)\mathsf{K}(\lambda; x, .)\mathsf{K}(\mu; ., y) = \lambda_p E_p(x, .)\mathsf{K}(\mu; ., y)$$

gelten muß. Da andererseits ebenfalls mit Rücksicht auf (68) in gleichem Sinne

$$\text{(72)} \qquad \underset{\nu'=0}{L}(\lambda_p - \lambda)\{\lambda \mathsf{K}(\lambda; x, y) - \mu \mathsf{K}(\mu; x, y)\} = \lambda_p^2 E_p(x, y)$$

wird, so folgt aus (71), (72) wegen (70), wenn wir noch λ statt μ schreiben;

$$\text{(73)} \qquad E_p(x, .)\mathsf{K}(\lambda; y, .) = \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda} E_p(x, y).$$

Setzen wir in dieser Gleichung wiederum $\lambda = \lambda_p + i\nu'$, so folgt aus ihr durch Multiplikation mit $\lambda_p - \lambda$ und Anwendung von (68) die Formel

$$\text{(74)} \qquad E_p(x, .)E_p(., y) = E_p(x, y).$$

Nehmen wir jedoch zuvor in (73) an Stelle von p den von p verschiedenen Index q und verfahren dann in gleicher Weise, so folgt

$$\text{(75)} \qquad E_p(x, .)E_q(., y) = 0, \qquad (p \neq q).$$

Mit Benutzung von (69) erkennen wir in gleicher Weise, daß die Formeln (74), (75) auch gültig sind, wenn statt E_p die ev. zu $\lambda = \infty$ gehörige Eigenform E_∞ gesetzt wird.

Setzt man den Wert von $\mathsf{K}(\lambda; x, y)$ aus (60) in (73) ein, so folgt aus (74), (75), daß identisch in λ die Gleichung

$$\text{(76)} \qquad E_p(x, .) \int\limits_{(s)} \frac{d\sigma(\mu; ., y)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = 0$$

erfüllt ist; dieselbe Gleichung gilt auch ev. für die Eigenform E_∞.

In der nachfolgenden Betrachtung verstehen wir allgemein unter einer *Einzelform* eine solche beschränkte quadratische Form E, deren Punktspektrum im Endlichen nur aus dem einen Punkte 1 besteht und die kein Streckenspektrum besitzt. Wenden wir unsere Darstellung (62) auf die Einzelform E an, so folgt, daß E selbst die zum Eigenwert 1 gehörige Eigenform ist und mithin wegen (74) der Relation

$$\text{(77)} \qquad E(x, .)E(., y) = E(x, y)$$

genügen muß. Umgekehrt, wenn eine beschränkte quadratische Form E der Relation (77) genügt, so erhalten wir für ihre Resolvente bei Anwendung der Formel (59) den Ausdruck

$$(x, x) + \lambda E + \lambda^2 E + \cdots = (x, x) - E + \frac{E}{1-\lambda},$$

und hieraus erkennen wir mit Rücksicht auf (68), (69), daß E nur den einen endlichen Eigenwert 1 besitzt, und sodann folgt auch das Nichtvorhandensein eines Streckenspektrums; d. h. E ist eine Einzelform.

Wenn

$$L_1(x) = l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \cdots,$$
$$L_2(x) = l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

irgendwelche Linearformen in endlicher oder unendlicher Zahl bedeuten, deren Koeffizienten den Relationen

$$L_p(.)L_p(.) = \sum_{(r)} l_{pr}^2 = 1,$$
$$L_p(.)L_q(.) = \sum_{(r)} l_{pr}l_{qr} = 0 \qquad (p \neq q)$$

genügen, so heiße jenes Formensystem ein *System orthogonaler Linearformen oder kurz ein orthogonales System.*

Der enge Zusammenhang des so definierten Begriffes mit dem Begriff der Einzelform wird erkennbar durch den folgenden Satz:

Jede Einzelform ist als Summe von Quadraten der Linearformen eines orthogonalen Systems darstellbar, und umgekehrt stellt die Summe der Quadrate der Linearformen eines orthogonalen Systems stets eine Einzelform dar.

Zum Beweise der ersten Aussage bedenken wir, daß, wenn

$$E(x) = \sum_{p,q} e_{pq}x_p x_q$$

gesetzt wird, wegen (77)

$$e_{11} = e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2 + \cdots$$

sein muß; wenn daher die Variabele x_1 in E überhaupt vorkommt, so ist gewiß der Koeffizient von x_1^2 in E positiv. Setzen wir

$$L_1(x) = \frac{1}{\sqrt{e_{11}}} \frac{\partial E(x, y)}{\partial y_1},$$

so erhalten wir wegen (77)

$$L_1(.)E(x, .) = L_1(x),$$
$$L_1(.)L_1(.) = 1.$$

Bilden wir daher

(78) $$E_1(x) = E(x) - L_1(x)^2,$$

so ergibt sich

$$(79)\qquad \begin{aligned} &L_1(.)E_1(x,.) = 0, \\ &E_1(x,.)E_1(.,y) = E_1(x,y), \end{aligned}$$

d. h. E_1 ist ebenfalls eine Einzelform; da E_1 als solche eine definite Form ist und wegen (78) der Koeffizient von x_1^2 in E_1 den Wert Null hat, so kommt die Variable x_1 in E_1 überhaupt nicht vor.

Wenden wir das nämliche Verfahren statt auf E nunmehr auf E_1 an, so gelangen wir zu einer Linearform L_2 und der Einzelform

$$E_2(x) = E_1(x) - L_2(x)^2 = E(x) - L_1(x)^2 - L_2(x)^2,$$

die die Variablen x_1, x_2 nicht enthält; zugleich folgt aus (79)

$$L_1(.)L_2(.) = 0.$$

Schließlich ergibt sich der Ausdruck

$$E(x) - L_1(x)^2 - L_2(x)^2 - \cdots$$

als eine definite beschränkte Form, die keine der Variabeln x_1, x_2, ... enthält und daher identisch Null ist, d. h. es ist

$$E(x) = L_1(x)^2 + L_2(x)^2 + \cdots$$

Um die umgekehrte Aussage des Satzes zu beweisen, bilden wir zunächst aus den ersten m Linearformen $L_1, \ldots, L_m$ des vorgelegten orthogonalen Systems den in $x_1, x_2, \ldots$ linearen Ausdruck

$$M(x) = (x, y) - L_1(x)L_1(y) - \cdots - L_m(x)L_m(y).$$

Da die Quadratsumme der Koeffizienten von $M(x)$

$$M(.)M(.) = (y, y) - L_1(y)^2 - \cdots - L_m(y)^2$$

wird, so folgt, daß hier auch die rechte Seite positiv ausfällt; mithin stellt auch die endliche bzw. unendlich fortgesetzte Formenreihe

$$L_1(y)^2 + L_2(y)^2 + \cdots$$

eine beschränkte quadratische Form dar, und wegen der Orthogonalitätseigenschaften der Linearformen L_1, L_2, ... folgt sodann, daß diese Form die Relation (77) erfüllt.

Die Einzelform (x, x) und nur diese besitzt auch $\lambda = \infty$ nicht als Eigenwert.

Wir wenden nun die vorstehenden Ergebnisse auf die Eigenformen der quadratischen Form $K(x)$ an. Indem wir die sämtlichen Eigenformen E_p bzw. E_p, E_∞ von $K(x)$, die wegen (74) Einzelformen sind, als Summen von Quadraten linearer orthogonaler Formen x_1', x_2', ... dargestellt denken, gelangen wir in folgender Weise zu einer orthogonalen Substitution der Variabeln x_1, x_2, ...

Wir bilden zunächst die Form

$$(x, x) - x_1'^2 - x_2'^2 - \cdots;$$

dieselbe genügt der Relation (77) und ist daher eine Einzelform der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$; setzen wir dieselbe in die Gestalt $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots$, wo $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ebenfalls ein orthogonales System linearer Formen bedeuten, die auch zu $x_1', x_2' \ldots$ orthogonal sind, so haben wir

$$(x, x) = x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots,$$

und mithin definieren die linearen Formen $x_1', x_2', \ldots, \xi_1, \xi_2, \ldots$ zusammengenommen eine orthogonale Substitution der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$

Da die Gleichung (76) gewiß für alle in genügend kleiner Umgebung von $\lambda = 0$ liegenden Werte von λ gelten soll, so schließen wir, da man jede stetige Funktion $w(\mu)$ in dem 0 nicht enthaltenden Intervall s durch lineare Aggregate von Funktionen $1 - \frac{\lambda}{\mu}$ gleichmäßig approximieren kann, daß auch für jede stetige Funktion $w(\mu)$

$$E_p(x, .)\int_{(s)} w(\mu)\, d\sigma(\mu; ., y) = 0$$

und folglich auch für alle μ

$$(80) \qquad E_p(x, .)\sigma(\mu; ., y) = 0$$

sein muß. Denken wir nun hierin an Stelle der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ die Variabeln $x_1', x_2', \ldots, \xi_1, \xi_2, \ldots$ eingeführt, so lehrt (80) mit Rücksicht auf die Kovarianz der Faltung bei orthogonaler Transformation, daß die so transformierte Spektralform von den Variabeln $x_1', x_2', \ldots$ frei ist; wir bezeichnen sie mit $\zeta(\mu; \xi)$. Die Formel (60) nimmt alsdann die Gestalt an

$$(81) \qquad \mathsf{K}(\lambda, x) = \sum_{(h=1,2,\ldots)} \frac{x_h'^2}{1 - k_h\lambda} + \int_{(s)} \frac{d\zeta(\mu; \xi)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}},$$

wo $k_1, k_2, \ldots$ die betreffenden reziproken Eigenwerte bedeuten, nachdem sie in eine einfach unendliche Reihe gebracht worden sind, wobei derselbe Wert mehrfach vorkommen kann.

Um die charakteristischen Eigenschaften der Spektralform $\zeta(\mu; \xi)$ zu finden, tragen wir in (70) den eben gefundenen Ausdruck (81) für die Resolvente ein; wir erhalten

$$(\lambda - \mu) \int_{(s)} \frac{d\zeta(\varrho; \xi, .)}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} \int_{(s)} \frac{d\zeta(\varrho; ., \eta)}{1 - \frac{\mu}{\varrho}}$$

$$= \lambda \int_{(s)} \frac{d\zeta(\varrho; \xi, \eta)}{1 - \frac{\lambda}{\varrho}} - \mu \int_{(s)} \frac{d\zeta(\varrho; \xi, \eta)}{1 - \frac{\mu}{\varrho}},$$

und mit Rücksicht auf die Identität

$$\frac{\dfrac{\lambda}{1-\dfrac{\lambda}{\varrho}} - \dfrac{\mu}{1-\dfrac{\mu}{\varrho}}}{\lambda-\mu} = \frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{\varrho}}\,\frac{1}{1-\dfrac{\mu}{\varrho}}$$

folgt

$$\int\limits_{(s)} \frac{d\zeta(\varrho;\xi,.)}{1-\dfrac{\lambda}{\varrho}} \int\limits_{(s)} \frac{d\zeta(\varrho;.,\eta)}{1-\dfrac{\mu}{\varrho}} = \int\limits_{(s)} \frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{\varrho}}\,\frac{1}{1-\dfrac{\mu}{\varrho}}\, d\zeta(\varrho;\xi,\eta).$$

Da diese Gleichung für alle Werte von λ, μ gültig sein soll, so schließen wir wie oben, daß auch für beliebige stetige Funktionen $u(\varrho)$, $v(\varrho)$

$$\int\limits_{(s)} u(\varrho)\,d\zeta(\varrho;\xi,.) \int\limits_{(s)} v(\varrho)\,d\zeta(\varrho;.,\eta) = \int\limits_{(s)} u(\varrho)v(\varrho)\,d\zeta(\varrho;\xi,\eta)$$

gilt; für $u(\varrho)=v(\varrho)$, $\xi=\eta$ nimmt die gefundene Relation die Form an

$$\int\limits_{(s)} (u(\varrho))^2\,d\zeta(\varrho;\xi) = \int\limits_{(s)} u(\varrho)\,d\zeta(\varrho;\xi,.) \int\limits_{(s)} u(\varrho)\,d\zeta(\varrho;.,\xi).$$

Weiterhin folgt aus (81) für $\lambda=0$

$$(\xi,\xi) = \int\limits_{(s)} d\zeta(\mu;\xi).$$

Da umgekehrt aus der vorletzten Relation die vorhergehenden und mithin schließlich auch (70) und daraus mit Hilfe der letzten Gleichung auch (63) gefolgert werden kann, so erkennen wir, daß die beiden zuletzt gefundenen Bedingungen zur Charakterisierung der Spektralform ζ auch hinreichend sind. Aus (68), (69), (74) folgt die eindeutige Bestimmtheit von λ_p, E_p, und andererseits schließen wir, daß auch die Spektralform durch die obigen für sie charakteristischen Relationen und durch die Forderung, es solle K die Darstellung (62) gestatten, eindeutig bestimmt ist; denn die eben angedeutete von den Eigenschaften der Spektralform ausgehende Betrachtungsweise ergibt, daß die Resolvente durch (60) dargestellt ist, und daß also wegen deren eindeutiger Bestimmtheit auch $\int\limits_{(s)} \frac{d\sigma(\mu)}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$ für alle λ und daher auch die Spektralform selbst eindeutig bestimmt ist.

Wir fassen die gewonnenen Resultate wie folgt zusammen:

Satz 33. *Jede beschränkte quadratische Form K unendlich vieler Variablen läßt sich stets und nur auf eine Weise durch eine orthogonale Substitution in die Gestalt bringen*

$$K = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \cdots + \int\limits_{(s)} \frac{d\sigma(\mu;\xi)}{\mu},$$

wo $k_1, k_2, \ldots$ *gewisse absolut unterhalb einer endlichen Grenze liegende Größen (die reziproken Eigenwerte) bedeuten und die Spektralform* $\sigma(\mu; \xi)$ *die zu ihrer Charakterisierung hinreichenden Relationen*

$$(82) \qquad \int\limits_{(s)} (u(\mu))^2 d\sigma(\mu; \xi) = \int\limits_{(s)} u(\mu) d\sigma(\mu; \xi, .) \int\limits_{(s)} u(\mu) d\sigma(\mu; ., \xi),$$

$$(\xi, \xi) = \int\limits_{(s)} d\sigma(\mu; \xi)$$

identisch für alle stetigen Funktionen $u(\mu)$ *erfüllt.*

Setzen wir in (63) $\lambda = \lambda_p + i\nu'$, so folgt nach Multiplikation mit $\lambda_p - \lambda$ für $\nu' = 0$ wegen (68):

$$E_p(x, y) - \lambda_p K(x, .) E_p(., y) = 0.$$

Wenn wir E_p als Quadratsumme eines orthogonalen Systemes darstellen:

$$E_p = \sum_{(h)} (L_{ph}(x))^2,$$

so ergibt sich durch Faltung mit $L_{ph}(y)$:

$$L_{ph}(x) - \lambda_p K(x, .) L_{ph}(.) = 0,$$

d. h. die Gleichung

$$\lambda L(.) K(x, .) = L(x)$$

kann durch eine beschränkte Linearform L gewiß dann identisch in $x_1, x_2, \ldots$ befriedigt werden, wenn λ einer der Eigenwerte von K ist. Ebenso folgt aus (69), daß

$$L(.) K(x, .) = 0$$

gewiß dann befriedigt werden kann, wenn $\lambda = \infty$ ein Eigenwert ist.

Wir können uns jetzt auch umgekehrt davon überzeugen, daß die obige Gleichung nur in diesem Falle durch eine beschränkte Linearform lösbar ist. Mit Rücksicht auf Satz 33 bedarf es dazu nur des Nachweises, daß, wenn L eine beschränkte Linearform der Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ist, die Relation

$$\lambda L(.) \int\limits_{(s)} \frac{d\sigma(\mu; \xi, .)}{\mu} = L(\xi)$$

für keinen Wert von λ statthaben kann. Bezeichnen wir die Koeffizienten von L mit l, so nimmt die letztere Relation die Gestalt an

$$\lambda \int\limits_{(s)} \frac{d\sigma(\mu; \xi, l)}{\mu} = (\xi, l).$$

Hiervon subtrahieren wir die Relation

$$\int\limits_{(s)} d\sigma(\mu; \xi, l) = (\xi, l)$$

und erhalten so die Relation

$$\int_{(s)} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) d\sigma(\mu; \xi, l) = 0,$$

die ebenfalls identisch in $\xi_1, \xi_2, \ldots$ erfüllt wäre. Nehmen wir nun in (82) $u(\mu) = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$, so folgt hieraus

$$\int_{(s)} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2 d\sigma(\mu; l) = 0,$$

und dies ist, da

$$\int_{(s)} d\sigma(\mu; l) = (l, l)$$

ist und da σ nie abnimmt, nur möglich für $(l, l) = 0$; wir gewinnen so folgende Tatsache:

Satz 34. *Wenn K irgendeine beschränkte quadratische Form ist, so ist die Relation*

$$\lambda L(.) K(x, .) = L(x)$$

durch eine beschränkte Linearform L dann und nur dann lösbar, wenn λ ein Eigenwert von K ist.

Insbesondere ist die Gleichung

$$L(.) K(x, .) = 0$$

dann und nur dann lösbar, wenn $\lambda = \infty$ ein Eigenwert von K ist. Ist $\lambda = \infty$ kein Eigenwert, diese Gleichung also nicht lösbar, so heiße die quadratische Form *abgeschlossen*.

Wir wollen uns fortan in diesem Kapitel XI mit gewissen zwei Spezialfällen des Satzes 33 ausführlicher beschäftigen.

Wir nennen eine Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ für ein bestimmtes Wertsystem derselben *vollstetig*, wenn die Werte von $F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \ldots)$ gegen den Wert $F(x_1, x_2, \ldots)$ konvergieren, wie man auch immer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ für sich zu Null werden läßt d. h. wenn

$$\underset{\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0, \ldots}{L} F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \ldots) = F(x_1, x_2, \ldots)$$

wird, sobald man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ irgend solche Wertsysteme $\varepsilon_1^{(h)}, \varepsilon_2^{(h)}, \ldots$ durchlaufen läßt, daß einzeln

$$\underset{h=\infty}{L} \varepsilon_1^{(h)} = 0, \quad \underset{h=\infty}{L} \varepsilon_2^{(h)} = 0, \ldots$$

ist. Wenn eine Funktion für jedes Wertsystem der Variabeln mit konvergenter Quadratsumme vollstetig ist, so heiße sie schlechthin *vollstetig*. An den Begriff der Vollstetigkeit knüpfen sich unmittelbar folgende Schlüsse.

Hat eine vollstetige Funktion F die Eigenschaft, absolut genommen für alle Werte der Variabeln unterhalb einer endlichen Größe zu bleiben, so besitzt sie — wie leicht durch das bekannte für endliche Variabelnzahl angewandte Verfahren bewiesen werden kann — ein Maximum. Bedeuten ferner $L_1(x), \ldots, L_m(x)$ noch m weitere vollstetige Funktionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ und werden nur diejenigen Wertsysteme dieser Variabeln zugelassen, die den Bedingungen

$$L_1(x) = 0, \ \ldots, \ L_m(x) = 0$$

genügen, so besitzt F ein relatives Maximum; dabei sind die Variabeln stets an die Ungleichung

$$(x, x) \leqq 1$$

gebunden.

Eine beschränkte Linearform der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ ist, wie man sofort sieht, auch vollstetig in diesen Variabeln. Wir schließen daraus leicht, daß eine vollstetige Funktion der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ durch orthogonale Transformation derselben wiederum eine vollstetige Funktion der neuen Variabeln wird.

Ist eine beschränkte quadratische Form K vollstetig, so ist offenbar, daß ihre Eigenwerte sich im Endlichen nicht häufen; zugleich läßt sich zeigen, daß ein Streckenspektrum überhaupt nicht vorhanden sein kann. Aus Satz 33 gewinnen wir mithin folgendes Resultat:

Satz 35. *Wenn eine beschränkte Form K vollstetig ist, so läßt sie sich stets durch eine orthogonale Substitution in die Gestalt bringen*

$$K(x) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots; \tag{83}$$

dabei sind die Größen $k_1, k_2, \ldots$ die reziproken Eigenwerte von K und besitzen, falls sie in unendlicher Anzahl vorkommen, Null als einzige Verdichtungsstelle.

Wegen der mannigfaltigen und wichtigen Anwendungen dieses Satzes geben wir hier für ihn einen sehr einfachen und von der obigen Theorie unabhängigen Beweis.

Wir nehmen zunächst an, daß K eine positiv definite Form sei; alsdann seien

$$x_1 = l_{11}, \quad x_2 = l_{12}, \ \ldots$$

solche Werte der Variabeln, für welche $K(x)$ das Maximum k_1 erlangt. Offenbar fällt die Quadratsumme dieser Werte gleich 1 aus, da wir ja sonst den Wert der Form ohne Verletzung der Bedingung $(x, x) \leqq 1$ vergrößern könnten.

Wir setzen

$$L_1(x) = l_{11} x_1 + l_{12} x_2 + \cdots$$

und bestimmen, indem wir nunmehr den Variabeln die Bedingung

$$L_1(x) = 0$$

auferlegen, das relative Maximum k_2 von $K(x)$; dasselbe werde für die Werte

$$x_1 = l_{21}, \quad x_2 = l_{22}, \ldots$$

erlangt, deren Quadratsumme wiederum gleich 1 ausfallen muß. Ferner setzen wir

$$L_2(x) = l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + \cdots$$

und bestimmen, indem wir den Variabeln die Bedingungen

$$L_1(x) = 0, \quad L_2(x) = 0$$

auferlegen, das relative Maximum k_3 von $K(x)$; dasselbe werde für

$$x_1 = l_{31}, \quad x_2 = l_{32}, \ldots$$

erlangt. Wir setzen dann

$$L_3(x) = l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + \cdots$$

und erhalten durch Fortsetzung dieses Verfahrens ein System von linearen Formen $L_1, L_2, L_3, \ldots$ mit den Orthogonalitätseigenschaften

$$L_p(\cdot)L_p(\cdot) = 1,$$
$$L_p(\cdot)L_q(\cdot) = 0 \qquad (p \neq q).$$

Auf Grund der früheren Betrachtungen (S. 143) bestimmen wir zu diesen Linearformen ein solches System von Linearformen

$$M_1(x),\ M_2(x),\ \ldots,$$

daß

$$\begin{aligned} x_1' &= L_1(x), \\ x_2' &= L_2(x), \\ &\cdots\cdots \\ y_1 &= M_1(x), \\ y_2 &= M_2(x), \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

eine orthogonale Substitution der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ bilden. Die vermöge dieser orthogonalen Substitution transformierte Form $K(x)$ bezeichnen wir mit $K(x', y)$. Der Koeffizient von $x_1'^2$ in $K(x', y)$ muß offenbar gleich k_1 ausfallen. Andererseits dürfen weitere x_1' enthaltende Glieder in $K(x', y)$ nicht vorkommen, da ja die Differenz

$$K(x', y) - k_1(x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + y_1^2 + y_2^2 + \cdots) = K(x) - k_1(x, x)$$

für alle Werte der Variabeln $x_1', x_2', \ldots, y_1, y_2, \ldots$ negativ oder Null ausfallen soll. Da die nämlichen Überlegungen für $x_2', x_3', \ldots$ gelten, so haben wir

$$K(x', y) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \cdots + R(y),$$

wo $R(y)$ eine quadratische Form bedeutet, die allein die Variabeln $y_1, y_2, \ldots$ enthält.

Da K vollstetig ist, so gilt dies auch von der Form

$$K(x', 0) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \cdots,$$

und mithin müssen die Größen $k_1, k_2, \ldots$, falls sie in unendlicher Anzahl vorkommen, gegen Null konvergieren; denn sonst würde es eine Reihe von Werten von $K(x'0)$ geben, die gegen einen von Null verschiedenen Wert konvergiert, während jedes der Argumente $x_1', x_2', \ldots$ für sich gegen Null konvergiert.

Gäbe es nun ein Wertsystem $y_1 = m_1$, $y_2 = m_2, \ldots$, für welches $R(m) > 0$ ausfiele, so könnte man q so bestimmen, daß auch $R(m) > k_q$ wird. Alsdann würde für

$$x_1' = 0, \; x_2' = 0, \; \ldots, \quad y_1 = m_1, \; y_2 = m_2, \; \ldots$$

auch $K > k_q$ ausfallen; die Gleichungen

$$L_1(x) = 0, \; L_2(x) = 0, \; \ldots . \quad M_1(x) = m_1, \; M_2(x) = m_2, \; \ldots$$

würden mithin ein Wertsystem der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ bestimmen, für welches insbesondere die Bedingungen

$$L_1(x) = 0, \; \ldots, \quad L_{q-1}(x) = 0$$

erfüllt sind und zugleich $K > k_q$ ausfällt; dies widerspricht der Bestimmungsweise von k_q, und mithin ist $R(y)$ nicht positiver Werte fähig.

Wegen

$$K(0, y) = R(y)$$

ist $R(y)$ gewiß auch negativer Werte nicht fähig, und folglich ist $R(y)$ identisch gleich Null; d. h. es ist

$$K(x) = k_1 L_1^2(x) + k_2 L_2^2(x) + \cdots.$$

Wird $K(x)$ nicht als eine definite Form angenommen, so führt die nämliche Überlegung auf die Darstellung

$$K(x) = k_1 L_1^2(x) + k_2 L_2^2(x) + \cdots + R(y),$$

wo $R(y)$ positiver Werte nicht fähig ist. Da sodann $-R(y)$ als positiv definite Form eine Darstellung derselben Art zuläßt, so erhalten wir schließlich auch für K eine Darstellung durch die Quadrate orthogonaler Linearformen, und damit ist der Beweis für den Satz 35 vollständig erbracht. —

Ein hinreichendes Kriterium für die Vollstetigkeit einer Form gewinnen wir durch folgenden Satz.

Satz 36. *Wenn für eine quadratische Form K eine der Summen*

$$s_2 = \sum_{(p,q)} k_{pq} k_{qp} = \sum_{(p,q)} k_{pq}^2,$$

$$s_4 = \sum_{(p,q,r,s)} k_{pq} k_{qr} k_{rs} k_{sp},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

endlich bleibt oder wenn für eine definite quadratische Form K eine der Summen

$$s_1 = \sum_{(p)} k_{pp},$$

$$s_3 = \sum_{(p,q,r)} k_{pq} k_{qr} k_{rp},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

endlich bleibt, so ist K eine beschränkte vollstetige Form.

In der Tat, ist K eine quadratische Form, deren Koeffizienten eine endliche Quadratsumme besitzen, so folgt wegen

$$\left| x_1 \frac{\partial K(x,y)}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial K(x,y)}{\partial y_2} + \cdots \right|^2 \leqq \left(\frac{\partial K(x,y)}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial K(x,y)}{\partial y_2}\right)^2 + \cdots,$$

$$\left(\frac{\partial K(x,y)}{\partial y_p}\right)^2 \leqq k_{p1}^2 + k_{p2}^2 + \cdots$$

notwendig

$$|K(x)| \leqq \sqrt{\sum_{(p,q)} k_{pq}^2}.$$

Durch Anwendung dieser Tatsache auf die quadratische Form

$$K(x) - K_n(x) = \sum_{(p,q)}^{(n)} k_{pq} x_p x_q,$$

wo rechts p, q alle ganzzahligen Wertepaare, abgesehen von solchen, für die zugleich $p \leqq n$ und $q \leqq n$ ist, durchläuft, finden wir

$$|K(x) - K_n(x)| \leqq \sqrt{\sum_{(p,q)}^{(n)} k_{pq}^2},$$

und hieraus entnehmen wir, da doch

$$\underset{n=\infty}{L} \sqrt{\sum_{(p,q)}^{(n)} k_{pq}^2} = 0.$$

wird, die verlangte Vollstetigkeit von $K(x)$.

Ist K eine definite Form, so muß

$$k_{pq}^2 \leqq k_{pp} k_{qq}$$

sein, und es ist mithin

$$\sum_{(p,q)} k_{pq}^2 \leqq \left(\sum_{(p)} k_{pp}\right)^2;$$

wenn also bei einer definiten Form $\sum_{(p)} k_{pp}$ endlich bleibt, so haben ihre Koeffizienten gewiß auch eine endliche Quadratsumme, und die Form ist nach der vorigen Betrachtung wiederum eine vollstetige Funktion der Variabeln.

Nunmehr erkennen wir leicht der Reihe nach folgende Tatsachen:

1. Wenn eine beschränkte quadratische Form K nicht vollstetig ist, so ist sie auch für das besondere Wertsystem $0, 0, \ldots$ nicht vollstetig. Diese Behauptung folgt durch Anwendung der Formel

$$K(x+a) = K(x) + 2K(x,a) + K(a),$$

wenn darin für $a_1, a_2, \ldots$ ein Wertsystem genommen wird, für welches K nicht vollstetig ist — mit Berücksichtigung des Umstandes, daß $K(x, a)$ als eine beschränkte Linearform gewiß vollstetig ist.

2. Wenn K eine vollstetige quadratische Form ist, so ist es auch die Form KK; dies ergibt unmittelbar der Satz 35.

3. Wenn K eine vollstetige, K^* irgendeine quadratische Form ist und für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots$ die Ungleichung

$$|K^*(x)| \leqq |K(x)|$$

gilt, so ist auch K^* vollstetig; denn aus dieser Ungleichung folgt die Vollstetigkeit für das Wertsystem $0, 0, \ldots$.

4. Wenn K eine vollstetige, K^* eine beschränkte Form ist, so ist die Faltung beider Formen vollstetig; wegen

$$|K(x,.)K^*(x,.)| \leqq \sqrt{(KK(x))(K^*K^*(x))}$$

ist nämlich diese Faltung für das Wertsystem $0, 0, \ldots$ gewiß vollstetig, da nach 2 die Form KK vollstetig ist.

5. Wenn die Faltung KK einer quadratischen Form K mit sich selbst vollstetig ist, so ist es auch die Form K selbst; dies ergibt sich ebenso vermöge 1 aus der Ungleichung

$$|K(x)| \leqq \sqrt{KK(x)}.$$

6. Ist eine der Formen, die durch wiederholte Faltung aus der beschränkten Form K entstanden sind:

$$K^{(3)} = KKK, \quad K^{(4)} = KKKK, \quad K^{(5)} = KKKKK, \quad \ldots$$

vollstetig, so ist auch K vollstetig. Denn ist etwa $K^{(f)}$ vollstetig, so sind wegen 4 auch die Formen

$$K^{(f+1)}, \; K^{(f+2)}, \; \ldots$$

vollstetig; wählen wir unter diesen eine Form aus, für die die Faltungszahl eine Potenz von 2 ist, etwa $K^{(2^g)}$, so schließen wir durch g-malige Anwendung von 5 auf die Vollstetigkeit von K.

7. Wenn K eine beschränkte definite Form ist, so sind auch die Faltungen $K^{(3)}, K^{(5)}, \ldots$ definit; denn es entsteht beispielsweise $K^{(3)}$ aus K, indem wir in $K(x)$ an Stelle der Variabeln x_p die Ausdrücke $\frac{\partial K^{(2)}(x, y)}{\partial y_p}$ einsetzen.

Da nun allgemein s_f nichts anderes als die Invariante $K^{(f)}(.,.)$ d. h. die Summe der Koeffizienten von x_p^2 in $K^{(f)}$ ist, so folgt aus 6 und 7, da der Fall $f = 1$ bereits zuvor erledigt worden ist, die Richtigkeit des Satzes 36 allgemein.

Aus Satz 35 und 36 entnehmen wir die folgende Tatsache:

Satz 37. *Eine quadratische Form K, die eine der Voraussetzungen des Satzes* 36 *erfüllt, gestattet gewiß die orthogonale Transformation* (83) *auf eine Quadratsumme.*

Ein Gegenstück zu dem in den Sätzen 35—37 behandelten Fall bildet die Annahme, daß die Form K kein Punktspektrum, sondern nur ein Streckenspektrum besitzt. Um hier nur den einfachsten Fall — der überdies typisch ist — ins Auge zu fassen, fügen wir dieser Annahme noch die weiteren hinzu, daß das Streckenspektrum s aus einer endlichen Anzahl von Intervallen bestehen möge, daß ferner die Koeffizienten der Spektralform $\sigma(\mu, \xi)$ stetig differenzierbare Funktionen von μ seien und endlich, daß, wenn

$$\frac{d\sigma(\mu, \xi)}{d\mu} = \psi(\mu, \xi) = \sum_{(p, q = 1, 2, \ldots)} \psi_{pq}(\mu) \xi_p \xi_q \text{ [1]}$$

gesetzt wird, $\psi_{11}(\mu)$ innerhalb s nirgends verschwindet und, wenn der Kürze halber

$$\psi_1(\mu) = \frac{\psi_{11}(\mu)}{\sqrt{\psi_{11}(\mu)}}, \quad \psi_2 = \frac{\psi_{12}(\mu)}{\sqrt{\psi_{11}(\mu)}}, \quad \ldots$$

ist, diese unendlich vielen Funktionen $\psi_1(\mu)$, $\psi_2(\mu)$, ... linear voneinander unabhängig ausfallen, in dem Sinne, daß bei willkürlicher Wahl von $u(\mu)$ zwischen den Integralen

(84) $$\int_{(s)} u(\mu)\psi_1(\mu)\,d\mu, \quad \int_{(s)} u(\mu)\psi_2(\mu)\,d\mu, \quad \ldots$$

keine lineare Relation bestehen soll, deren Koeffizienten Konstanten mit endlicher Quadratsumme sind.

Führen wir in die Relation (82) diese Annahmen ein und setzen

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad \ldots,$$

und an Stelle von $u(\mu)$ die Funktion

$$\frac{u(\mu)}{\sqrt{\psi_{11}(\mu)}},$$

so ergibt sich

(85) $$\int_{(s)} (u(\mu))^2 d\mu = \sum_{(p=1, 2, \ldots)} \left\{\int_{(s)} u(\mu)\psi_p(\mu)\,d\mu\right\}^2,$$

und hieraus entnehmen wir die allgemeinere Formel

(86) $$\int_{(s)} u(\mu)v(\mu)\,d\mu = \sum_{(p=1, 2, \ldots)} \int_{(s)} u(\mu)\psi_p(\mu)\,d\mu \int_{(s)} v(\mu)\psi_p(\mu)\,d\mu.$$

Für

$$v(\mu) = \psi_q(\mu)$$

folgt mithin

---

1) Diese Gleichungen und die daraus entspringenden gelten nur für jeden Abschnitt, da $\psi(\mu, \xi)$ nicht beschränkt ist.

$$(87)\qquad \int\limits_{(s)} u(\mu)\psi_q(\mu)\,d\mu = \sum_{(p=1,2,\ldots)} \int\limits_{(s)} \psi_p(\mu)\psi_q(\mu)\,d\mu \int\limits_{(s)} \psi_p(\mu)u(\mu)\,d\mu.$$

Aus unserer Annahme über die lineare Unabhängigkeit der Integrale (84) erkennen wir, daß die Relation (87) identisch für alle Funktionen $u(\mu)$ nicht anders erfüllt sein kann, als wenn

$$(88)\qquad \int\limits_{(s)} (\psi_p(\mu))^2\,d\mu = 1,$$

$$\int\limits_{(s)} \psi_p(\mu)\psi_q(\mu)\,d\mu = 0 \qquad (p \neq q)$$

ist.

Wegen des positiv definiten Charakters der Form $\psi(\mu, \xi)$ ist

$$(\psi_{11}(\mu)\xi_1 + \psi_{12}(\mu)\xi_2 + \cdots)^2 \leqq \psi(\mu, \xi)\psi_{11}$$

oder

$$(89)\qquad (\psi_1(\mu)\xi_1 + \psi_2(\mu)\xi_2 + \cdots)^2 \leqq \psi(\mu, \xi).$$

Andererseits haben wir wegen (88)

$$\int\limits_{(s)} (\psi_1\xi_1 + \psi_2\xi_2 + \cdots)^2\,d\mu = (\xi, \xi),$$

und, da auch

$$\int\limits_{(s)} \psi(\mu, \xi)\,d\mu = (\xi, \xi)$$

ist, so wird

$$\int\limits_{(s)} \{\psi(\mu, \xi) - (\psi_1(\mu)\xi_1 + \psi_2(\mu)\xi_2 + \cdots)^2\}\,d\mu = 0.$$

Da aber der hier unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck nach (89) für keinen Wert von μ negativ ausfällt, so ist er stets gleich Null, d. h. es ist

$$\psi(\mu, \xi) = (\psi_1(\mu)\xi_1 + \psi_2(\mu)\xi_2 + \cdots)^2.$$

Wir ersehen hieraus, daß unter den gemachten Annahmen die charakteristische Eigenschaft der Spektralform $\sigma(\mu, \xi)$ darin besteht, daß ihre Ableitung nach μ das Quadrat einer Linearform wird, deren Koeffizienten die Orthogonalitätseigenschaften (85) und (88) besitzen. Da umgekehrt eine solche Form alle charakteristischen Eigenschaften einer Spektralform erfüllt, so ist es hiernach leicht, eine quadratische Form K zu konstruieren, deren Spektrum aus einer Zahl gegebener Intervalle besteht: man bestimme für die Intervalle s ein vollständiges System von orthogonalen Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots$ d. h. ein System solcher Funktionen, die den Relationen (85) und (88) genügen, — was leicht geschehen kann (vgl. Kap. XIII) — und setze dann

$$K(\xi) = \int\limits_{(s)} \frac{(\psi_1\xi_1 + \psi_2\xi_2 + \cdots)^2}{\mu}\,d\mu.$$

Als einfachstes Beispiel diene die quadratische Form

(90) $$K(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + \cdots;$$

diese besitzt kein Punktspektrum, und ihr Streckenspektrum besteht aus den Intervallen

$$\lambda = -\infty \text{ bis } -1 \text{ und } +1 \text{ bis } +\infty.$$

Wir finden

$$\psi_p(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} \sin pt,$$

wo t den zwischen 0 und π gelegenen Wert von $\operatorname{arc} \cos \frac{1}{\mu}$ bedeutet. In der Tat bestätigt sich dann durch Rechnung

$$\int\limits_{\binom{-\infty \cdots -1}{+1 \cdots +\infty}} (\psi_1(\mu) x_1 + \psi_2(\mu) x_2 + \cdots)^2 d\mu = (x, x),$$

$$K(x) = \int\limits_{\binom{-\infty \cdots -1}{+1 \cdots +\infty}} \frac{(\psi_1(\mu) x_1 + \psi_2(\mu) x_2 + \cdots)^2}{\mu} d\mu.$$

In Bestätigung von Satz 34 haben ferner, wie man erkennt, die unendlich vielen Gleichungen

$$x_1 - \frac{\lambda}{2} x_2 = 0,$$

$$x_2 - \frac{\lambda}{2} (x_1 + x_3) = 0,$$

$$x_3 - \frac{\lambda}{2} (x_2 + x_4) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

für keinen Wert von λ Lösungen $x_1, x_2, \ldots$, deren Quadratsumme endlich bleibt.

Ein anderes Beispiel liefert die quadratische Form

(91) $$\frac{2}{\sqrt{2^2-1}} x_1 x_2 + \frac{4}{\sqrt{4^2-1}} x_2 x_3 + \frac{6}{\sqrt{6^2-1}} x_3 x_4 + \cdots;$$

das Spektrum ist das nämliche wie im ersten Beispiel. Wir finden

$$\psi_p(\mu) = \sqrt{\frac{2p-1}{2}} \frac{1}{\mu} P^{(p-1)} \left(\frac{1}{\mu}\right),$$

wo die P die Legendreschen Polynome sind. Setzen wir noch

$$\chi_p(\mu) = \sqrt{\frac{2p-1}{2}} \frac{1}{\mu} Q^{(p-1)} \left(\frac{1}{\mu}\right),$$

wo die Q die zugehörigen Kugelfunktionen zweiter Art bedeuten, so erhält die Resolvente von K folgende Gestalt:

$$\mathsf{K}(\lambda, x) = \sum_{(p, q \geqq p)} 4 \lambda \psi_p(\lambda) \chi_q(\lambda) x_p x_q.$$

Die beiden quadratischen Formen (90) und (91) lassen sich durch eine orthogonale Substitution der Variabeln in einander überführen, wie aus ihrer Darstellung durch die Spektralform hervorgeht.

Läßt man die oben gemachte Annahme der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\psi_1(\mu)$, $\psi_2(\mu)$, ... fallen, so wird die Ableitung der Spektralform nicht ein Quadrat, sondern eine Summe von Quadraten linearer Formen von entsprechender Art.

Zwölftes Kapitel.

Simultanes System quadratischer Formen, die Hermitesche Form, die schiefsymmetrische Form und die Bilinearform mit unendlich vielen Variabeln.

Die in Kapitel XI entwickelten Methoden und Resultate lassen sich ohne prinzipielle Schwierigkeit auf allgemeinere Formen mit unendlich vielen Variabeln ausdehnen. Wir betrachten zunächst den Fall eines simultanen Systems zweier quadratischer Formen, von denen die eine definiten Charakter hat, die andere als Aggregat von positiven und negativen Quadraten der Variabeln vorgelegt ist. Mit Hilfe unserer Methode des Grenzüberganges, ausgehend von Formen mit endlicher Variabelnzahl, können wir leicht die entsprechende Theorie entwickeln; wir heben nur folgendes Resultat hervor:

Satz 38. *Es sei eine positiv definite, vollstetige, abgeschlossene quadratische Form $K(x)$ und außerdem eine quadratische Form von der Gestalt*

$$V(x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \cdots$$

vorgelegt, wo $v_1, v_2, \ldots$ bestimmte Werte $+1$ oder -1 sind: alsdann gibt es stets eine unendliche Reihe von Null verschiedener Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$, deren Vorzeichen bzw. $v_1, v_2, \ldots$ sind und die gegen Null konvergieren — ihre reziproken Werte mögen Eigenwerte von K in bezug auf V heißen — und von zugehörigen beschränkten Linearformen $L_1(x), L_2(x), \ldots$ — sie mögen die zugehörigen Eigenformen heißen — von solcher Art, daß die „Polaritätsrelationen"

$$L_p(.)\,V(.\,,.)\,L_p(.) = v_p,$$
$$L_p(.)\,V(.\,,.)\,L_q(.) = 0, \qquad (p \neq q)$$

erfüllt sind und daß ferner die vorgelegte quadratische Form die Darstellung

$$K(x) = |\varkappa_1|\,(L_1(x))^2 + |\varkappa_2|\,(L_2(x))^2 + \cdots$$

gestattet.

Man kann diesen Satz 38 auch ohne den Grenzübergang von endlicher zu unendlicher Variabelnzahl lediglich auf Grund des Satzes 35 mit Ausschluß neuer Konvergenzbetrachtungen beweisen.

Zu dem Zwecke bringen wir die Form $K(x)$ nach Satz 35 durch eine orthogonale Transformation der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ in die Gestalt einer Quadratsumme; wir bezeichnen die neuen Variabeln mit $x'_1, x'_2, \ldots$ und finden

$$K(x) = k_1 x'^2_1 + k_2 x'^2_2 + \cdots,$$

wo dann $k_1, k_2, \ldots$ lauter positive Größen sind, die gegen Null konvergieren. Ferner bezeichnen wir mit $V'(x')$ die durch jene orthogonale Transformation aus $V(x)$ hervorgehende quadratische Form der Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots$ und endlich mit $V'(\sqrt{k}\xi)$ diejenige quadratische Form der Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$, die aus $V'(x')$ hervorgeht, wenn wir in derselben an Stelle von $x'_1, x'_2, \ldots$ die Ausdrücke $\sqrt{k_1}\xi_1, \sqrt{k_2}\xi_2, \ldots$ einsetzen.

Wir können nun leicht zeigen, daß $V'(\sqrt{k}\xi)$ eine vollstetige Form der Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ist. In der Tat ist, wie man sieht, $V'(x')$ als Differenz zweier Einzelformen $E_1(x')$ und $E_2(x')$ darstellbar: diese genügen als solche den Ungleichungen

$$E_1(x') \leqq (x', x'), \quad E_2(x') \leqq (x', x').$$

Setzen wir an Stelle von $x'_1, x'_2, \ldots$ wieder $\sqrt{k_1}\xi_1, \sqrt{k_2}\xi_2, \ldots$ ein, so gehen diese Ungleichungen über in

$$E_1(\sqrt{k}\xi) \leqq k_1\xi_1^2 + k_2\xi_2^2 + \cdots,$$

$$E_2(\sqrt{k}\xi) \leqq k_1\xi_1^2 + k_2\xi_2^2 + \cdots.$$

Wären nun diese Einzelformen nicht vollstetig in den Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$, so müßten sich auch Wertsysteme $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots$ finden lassen, für die

$$\underset{n=\infty}{L}\alpha_1^{(n)} = 0, \quad \underset{n=\infty}{L}\alpha_2^{(n)} = 0, \quad \ldots$$

wird, während die Einzelformen, die ja positiv definit sind, für

$$\xi_1 = \alpha_1^{(n)}, \quad \xi_2 = \alpha_2^{(n)}, \quad \ldots$$

Werte erhalten müßten, die oberhalb einer positiven von n unabhängigen Größe bleiben; dies aber widerspräche den obigen Ungleichungen, da $K(x)$ vollstetig ist. Da demnach $E_1(\sqrt{k}\xi)$, $E_2(\sqrt{k}\xi)$ vollstetig in $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sind, so ist dies auch $V'(\sqrt{k}\xi)$. Die Tatsache der Vollstetigkeit von $E_1(\sqrt{k}\xi)$, $E_2(\sqrt{k}\xi)$ in den Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$ folgt auch unmittelbar aus 4. auf S. 152.

Nunmehr transformieren wir nach Satz 35 die Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$ orthogonal in die neuen Variabeln $\xi_1', \xi_2', \ldots$ derart, daß die Form $V'(\sqrt{k}\xi)$ die Gestalt

$$V'(\sqrt{k}\xi) = \varkappa_1\xi_1'^2 + \varkappa_2\xi_2'^2 + \cdots$$

erhält, worin $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ gewisse reelle Größen sind, die gegen Null konvergieren. Bezeichnen wir nun diejenigen Linearformen von $x_1', x_2', \ldots$, die aus den Formen $\xi_p'(\xi)$ hervorgehen, wenn wir darin für $\xi_1, \xi_2, \ldots$ bzw. die Ausdrücke $\sqrt{k_1}x_1', \sqrt{k_2}x_2', \ldots$ einsetzen, mit $\xi_p'(\sqrt{k}x')$, so ist, da jene Formen eine orthogonale Transformation definieren,

$$K(x) = (\sqrt{k_1}x_1')^2 + (\sqrt{k_2}x_2')^2 + \cdots$$
$$= (\xi_1'(\sqrt{k}x'))^2 + (\xi_2'(\sqrt{k}x'))^2 + \cdots;$$

ferner wird:

$$\xi_p'(.)\, V'(\sqrt{k}\xi, \sqrt{k}.) = \frac{\partial \xi_p'(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial V'(\sqrt{k}\xi, \sqrt{k}\eta)}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \xi_p'(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial V'(\sqrt{k}\xi, \sqrt{k}\eta)}{\partial \eta_2} + \cdots$$
$$= \xi_p'(\sqrt{k}.)\, V'(\sqrt{k}\xi, .),$$

und folglich wird

$$\xi_p'(\sqrt{k}.)\, V'(\sqrt{k}\xi, .) = \varkappa_p \xi_p'(\xi).$$

Aus dieser Formel schließen wir in gleicher Weise

$$\xi_p'(\sqrt{k}.)\, V'(., .)\xi_p'(\sqrt{k}.) = \varkappa_p \xi_p'(.)\xi_p'(.).$$

Wenn wir nun wieder zu den Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ zurückkehren und allgemein mit $A_p(x)$ diejenige Linearform von $x_1, x_2, \ldots$ bezeichnen, die dabei aus $\xi_p'(\sqrt{k}x')$ wird, so erhalten wir

$$A_p(.)\, V(., .) A_q(.) = \varkappa_p \xi_p'(.)\xi_q'(.),$$

und das ist wegen der Orthogonalität der Formen $\xi_p'(\xi)$ gleich $\varkappa_p$ $(p = q)$ oder gleich Null $(p \neq q)$; andererseits wird

$$K(x) = A_1^2(x) + A_2^2(x) + \cdots.$$

Wäre $\varkappa_p = 0$, so müßte für alle $x_1, x_2, \ldots$

$$A_p(.)\, V(., .) K(., x) = 0$$

sein, was der Abgeschlossenheit von K und von V widerspräche; folglich sind $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ lauter von Null verschiedene Größen.

Wir können nunmehr die Summanden $\varkappa_1 \xi_1'^2, \varkappa_2 \xi_2'^2, \ldots$ in der obigen Darstellung von $V'(\sqrt{k}\xi)$ derart angeordnet denken, daß allgemein $\varkappa_p$ das Vorzeichen von v_p besitzt. In der Tat: eine solche Anordnung jener Summanden wäre nur dann nicht ausführbar, wenn entweder die Anzahl der negativen (bzw. positiven) Einheiten in der Reihe $v_1, v_2, \ldots$ endlich und zugleich die Anzahl der negativen (bzw. positiven) Größen, die in der Reihe $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ vorkommen, größer als die erstere Anzahl ausfiele, oder wenn die Anzahl der negativen (bzw. positiven) Größen in der Reihe $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ endlich und zugleich die Anzahl der negativen (bzw. positiven) Einheiten in der Reihe $v_1, v_2, \ldots$ größer als die erstere Anzahl ausfiele.

Wenn wir nun mit $x_1(\sqrt{k}\xi), x_2(\sqrt{k}\xi), \ldots$ diejenigen Linearformen in $\xi_1, \xi_2, \ldots$ bezeichnen, die aus $x_1(x'), x_2(x'), \ldots$ entstehen, wenn wir für

$x_1', x_2', \ldots$ die Ausdrücke $\sqrt{k_1}\xi_1, \sqrt{k_2}\xi_2, \ldots$ einsetzen, so ist identisch in $\xi_1, \xi_2, \ldots$

$$v_1(x_1(\sqrt{k}\xi))^2 + v_2(x_2(\sqrt{k}\xi))^2 + \cdots = \varkappa_1(\xi_1'(\xi))^2 + \varkappa_2(\xi_2'(\xi))^2 + \cdots,$$

da beide Seiten dieser Gleichung $V'(\sqrt{k}\xi)$ darstellen.

Wir nehmen — entsprechend dem ersten Falle — an, es seien $v_1, \ldots, v_e$ negativ (bzw. positiv), $v_{e+1}, v_{e+2}, \ldots$ sämtlich positiv (bzw. negativ), ferner $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{e+1}$ negativ (bzw. positiv). Da die Formen $\xi_1'(\xi)$, $\xi_2'(\xi), \ldots$ eine orthogonale Substitution bestimmen, d. h. ein *vollständiges orthogonales System von Linearformen* — wie wir sagen wollen — bilden, so ist jede beschränkte Linearform von $\xi_1, \xi_2, \ldots$ als lineare Kombination der Formen $\xi_1'(\xi), \xi_2'(\xi), \ldots$ darstellbar; wir setzen insbesondere

$$x_1(\sqrt{k}\xi) = a_{11}\xi_1'(\xi) + a_{12}\xi_2'(\xi) + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_e(\sqrt{k}\xi) = a_{e1}\xi_1'(\xi) + a_{e2}\xi_2'(\xi) + \cdots,$$

wo $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{e1}, a_{e2}, \ldots$ gewisse Koeffizienten bedeuten. Sodann bestimmen wir solche nicht sämtlich verschwindende Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{e+1}$, die den e Gleichungen

$$a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1\,e+1}\alpha_{e+1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{e1}\alpha_1 + \cdots + a_{e\,e+1}\alpha_{e+1} = 0$$

genügen, und bilden die Gleichungen

$$\xi_1'(\xi) = \alpha_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\xi'_{e+1}(\xi) = \alpha_{e+1},$$

$$\xi'_{e+2}(\xi) = 0,$$

$$\xi'_{e+3}(\xi) = 0,$$

$$\cdots\cdots$$

Die durch Auflösung dieser Gleichungen entstehenden Werte von $\xi_1, \xi_2, \ldots$ würden einen Widerspruch ergeben, da sie in die vorhin aufgestellte Identität

$$v_1(x_1(\sqrt{k}\xi))^2 + v_2(x_2(\sqrt{k}\xi))^2 + \cdots = \varkappa_1(\xi_1'(\xi))^2 + \varkappa_2(\xi_2'(\xi))^2 + \cdots$$

eingesetzt der linken Seite einen nicht negativen (bzw. nicht positiven) Wert, der rechten Seite dagegen gewiß einen negativen (bzw. positiven) Wert erteilen würden.

Um den zweiten der oben genannten Fälle zu behandeln, gehen wir von der in $x_1', x_2', \ldots$ identischen Gleichung

$$v_1(x_1(x'))^2 + v_2(x_2(x'))^2 + \cdots = \varkappa_1\left(\xi_1'\left(\frac{x'}{\sqrt{k}}\right)\right)^2 + \varkappa_2\left(\xi_2'\left(\frac{x'}{\sqrt{k}}\right)\right)^2 + \cdots$$

aus, wo $\xi_1'\left(\frac{x'}{\sqrt{k}}\right)$, $\xi_2'\left(\frac{x'}{\sqrt{k}}\right)$, ... diejenigen Linearformen von x_1', x_2', ... bedeuten, die aus $\xi_1'(\xi)$, $\xi_2'(\xi)$, ... entstehen, wenn wir an Stelle von ξ_1, ξ_2, ... die Ausdrücke $\frac{x_1'}{\sqrt{k_1}}$, $\frac{x_2'}{\sqrt{k_2}}$, ... setzen. Da jedoch die Linearformen $\xi_1'\left(\frac{x'}{\sqrt{k}}\right)$, $\xi_2'\left(\frac{x'}{\sqrt{k}}\right)$, ... nicht notwendig beschränkte Linearformen in x_1', x_2', ... werden, so hat obige Identität nur als Abschnittsgleichung einen Sinn, und das im ersten Falle eingeschlagene Verfahren bedarf der folgenden Modifikation.

Wir nehmen an, es seien $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_e$ negativ (bzw. positiv), $\varkappa_{e+1}$, $\varkappa_{e+2}$, ... sämtlich positiv (bzw. negativ), ferner $v_1, \ldots, v_{e+1}$ negativ (bzw. positiv). Alsdann setzen wir

$$\xi_1'\left(\frac{x'}{\sqrt{k}}\right) = \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2' + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_e'\left(\frac{x'}{\sqrt{k}}\right) = \alpha_{e1}x_1' + \alpha_{e2}x_2' + \cdots$$

Ferner denken wir uns die Gleichungen

$$x_1(x') = a_1, \; \ldots, \; x_{e+1}(x') = a_{e+1}, \quad x_{e+2}(x') = 0, \quad x_{e+3}(x') = 0, \; \ldots$$

nach x_1', x_2', ... aufgelöst und stellen die Lösungen als Funktionen von $a_1, \ldots, a_{e+1}$, wie folgt, dar:

$$x_1' = o_{11}a_1 + \cdots + o_{1\,e+1}a_{e+1},$$
$$x_2' = o_{12}a_1 + \cdots + o_{2\,e+1}a_{e+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Endlich bestimmen wir für jedes n solche $e+1$ Größen $a_1^{(n)}, \ldots, a^{(n)}_{e+1}$, daß nach Eintragung dieser Werte von x_1', x_2', ... die $e+1$ Gleichungen

$$\alpha_{11}x_1' + \cdots + \alpha_{1n}x_n' = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{e1}x_1' + \cdots + \alpha_{en}x_n' = 0,$$
$$a_1^2 + \cdots + a^2_{e+1} = 1$$

für

$$a_1 = a_1^{(n)}, \; \ldots, \; a_{e+1} = a^{(n)}_{e+1}$$

erfüllt sind.

Wählen wir nun solche $n = n_h$ aus, daß die Grenzwerte von $a_1^{(n_h)}, \ldots, a^{(n_h)}_{e+1}$ für $h = \infty$ existieren, und setzen die durch diese Werte $a_1^{(n_h)}, \ldots, a^{(n_h)}_{e+1}$ vermittelten Größen $x_1', \ldots, x'_{n_h}$ in den $n_h$ten Abschnitt der obigen Identität

$$v_1(x_1(x'))^2 + v_2(x_2(x'))^2 + \cdots = \varkappa_1\left(\xi_1'\left(\frac{x'}{\sqrt{k}}\right)\right)^2 + \varkappa_2\left(\xi_2'\left(\frac{x'}{\sqrt{k}}\right)\right)^2 + \cdots$$

ein, so erkennen wir, daß die linke Seite dieser Identität, da sie eine beschränkte Form der Variabeln $x_1', x_2', \ldots$ darstellt und als solche nach S. 127 stetig in diesen Variabeln ist, in der Grenze für $h = \infty$ den Wert -1 erhält, während die rechte Seite beständig $\geqq 0$ ausfüllt.

Hiernach sind beide Fälle als unmöglich erkannt, und wir dürfen also von vorneherein allgemein $\varkappa_p$ vom selben Vorzeichen wie v_p annehmen.

Setzen wir daher jetzt

$$L_p(x) = \frac{A_p(x)}{\sqrt{\varkappa_p}},$$

so sind die Linearformen $L_1(x), L_2(x), \ldots$ von der im Satze 38 verlangten Beschaffenheit.

Das nämliche Schlußverfahren ermöglicht die Behandlung einer nicht abgeschlossenen Form K.

Um dies einzusehen, bringen wir wiederum die Form K nach Satz 35 durch eine orthogonale Transformation der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ in die Gestalt einer Quadratsumme. Wir setzen

$$K(x) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \cdots.$$

wo $k_1, k_2, \ldots$ teils positive, teils verschwindende Größen sind.

Wir bezeichnen wiederum mit $V'(x')$ die durch jene orthogonale Transformation aus $V(x)$ hervorgehende quadratische Form der Variabeln $x_1', x_2', \ldots$ und endlich mit $V'(\sqrt{k}\xi)$ diejenige quadratische Form der Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$, die aus $V'(x')$ hervorgeht, wenn wir in derselben an Stelle von $x_1', x_2' \ldots$ die Ausdrücke $\sqrt{k_1}\xi_1, \sqrt{k_2}\xi_2, \ldots$ einsetzen. Da $V'(\sqrt{k}\xi)$ eine vollstetige Form in $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ist, so können wir nach Satz 35 die Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$ orthogonal in die neuen Variabeln $\xi_1', \xi_2', \ldots$ transformieren derart, daß

$$V'(\sqrt{k}\xi) = \varkappa_1 \xi_1'^2 + \varkappa_2 \xi_2'^2 + \cdots$$

sind, worin $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ gewisse teils positive oder negative teils verschwindende Größen sind, die, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden, gegen Null konvergieren. Bilden wir endlich entsprechend wie vorhin die Ausdrücke $\xi_p'(\sqrt{k}x')$ und bezeichnen allgemein mit $A_p(x)$ diejenige Linearform, die aus $\xi_p'(\sqrt{k}x')$ wird, wenn wir darin statt der Variabeln $x_1', x_2', \ldots$ wieder die ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ einführen, so wird wie vorhin

$$K(x) = A_1^2(x) + A_2^2(x) + \cdots,$$

$$A_p(.)\,V(.,.)\,A_q(.) = 0 \quad (p \neq q), \qquad \text{bzw.} = \varkappa_p \quad (p = q).$$

Wir sprechen dieses den Satz 38 ergänzende Resultat wie folgt aus:

Satz 38*. *Es sei eine positiv definite vollstetige quadratische Form $K(x)$ und außerdem eine quadratische Form von der Gestalt*

$$V(x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \cdots$$

vorgelegt, wo $v_1, v_2, \ldots$ bestimmte Werte $+1$ oder -1 sind: alsdann gibt es stets eine Reihe von teils positiven oder negativen, teils verschwindenden Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$, die, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden, gegen Null konvergieren, und von zugehörigen beschränkten Linearformen $A_1(x)$, $A_2(x), \ldots$ derart, daß die Polaritätsrelationen

$$A_p(.)\,V(.,.)\,A_p(.) = \varkappa_p,$$

$$A_p(.)\,A(.,.)\,A_q(.) = 0, \qquad (p \neq q)$$

erfüllt sind, und daß ferner die vorgelegte quadratische Form die Darstellung

$$K(x) = A_1^2(x) + A_2^2(x) + \cdots$$

gestattet.

Unter einer *Hermiteschen Form* der unendlich vielen Variabeln x_1, $x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ verstehen wir eine Bilinearform dieser Variabeln von der Gestalt

$$H(x, y) = \sum_{(p,q)} h_{pq} x_p y_q,$$

deren Koeffizienten h_{pq} komplexe der Bedingung

$$h_{pq} = k_{pq} + i s_{pq} = \bar{h}_{qp} = k_{qp} - i s_{qp}$$

genügende Größen sind. Stellt sowohl Real- wie Imaginärteil von $H(x, y)$ eine vollstetige Funktion der reellen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ dar, so lassen sich reelle, im Endlichen nirgends sich verdichtende Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — die Eigenwerte von H — und zugehörige Linearformen mit komplexen Koeffizienten $L_1(x), L_2(x), \ldots$ — die Eigenformen von H — finden, so daß

$$(x, y) = L_1(x)\bar{L}_1(y) + L_2(x)\bar{L}_2(y) + \cdots,$$

$$H(x, y) = \frac{L_1(x)\bar{L}_1(y)}{\lambda_1} + \frac{L_2(x)\bar{L}_2(y)}{\lambda_2} + \cdots$$

wird, und daß die Orthogonalitätseigenschaften

$$L_p(.)\bar{L}_p(.) = 1, \quad L_p(.)\bar{L}_q(.) = 0 \qquad (p \neq q)$$

erfüllt sind; die horizontalen Striche deuten die Vertauschung von i mit $-i$ an. — Der Beweis dieser Tatsache kann analog wie unten der Beweis des spezielleren Satzes 39 geführt werden.

Nehmen wir die Koeffizienten der Hermiteschen Form rein imaginär an und unterdrücken alsdann den Faktor i, so entspringt die schief-

symmetrische Form; unter einer *schiefsymmetrischen Form* verstehen wir mithin eine Bilinearform der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ von der Gestalt

$$S(x, y) = \sum_{(p,q)} s_{pq} x_p y_q ,$$

deren Koeffizienten reelle der Bedingung

$$s_{pq} = - s_{qp}, \quad s_{pp} = 0$$

genügende Größen sind. Die vorhin für eine Hermitesche Form ausgesprochene Tatsache drückt sich für den besonderen Fall der schiefsymmetrischen Form, wie folgt, aus:

Satz 39: *Wenn die schiefsymmetrische Form $S(x, y)$ vollstetig ist, so gibt es eine orthogonale Transformation der Variabeln*

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$$

in die neuen Variabeln

$$\xi_1, \xi_1', \xi_2, \xi_2', \ldots$$

so daß, wenn die Variabeln $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ mittelst derselben orthogonalen Transformation simultan in die Variabeln $\eta_1, \eta_1', \eta_2, \eta_2', \ldots$ übergehen, die Form S die Gestalt

$$S(x, y) = k_1(\xi_1 \eta_1' - \xi_1' \eta_1) + k_2(\xi_2 \eta_2' - \xi_2' \eta_2) + \cdots$$

erhält; dabei sind $k_1, k_2, \ldots$ Größen, die, falls sie in unendlicher Zahl vorkommen, Null als einzige Verdichtungsstelle besitzen.

Zum Beweise betrachten wir $2S(x, y)$ als quadratische Form der unendlich vielen Variabeln $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ und erkennen sodann aus Satz 35 das Vorhandensein von Größen $k_1, k_2, \ldots$ und zugehörigen Linearformen $L_1(x, y), L_2(x, y), \ldots$ jener Variabeln, so daß

$$2S(x, y) = k_1(L_1(x, y))^2 + k_2(L_2(x, y))^2 + \cdots$$

und

$$(x, x) + (y, y) = (L_1(x, y))^2 + (L_2(x, y))^2 + \cdots$$

wird. Mit Rücksicht auf die Eigenschaften der schiefsymmetrischen Form

$$S(x, y) = - S(y, x),$$
$$S(x, y) = - S(- x, y)$$

folgt leicht, daß in der obigen Darstellung für $2S(x, y)$ zu jedem k_p, L_p stets noch die Eigenwerte und zugehörigen Linearformen

$$k_{p'} = - k_p, \qquad L_{p'}(x, y) = L_p(y, x),$$
$$k_{p''} = - k_p, \qquad L_{p''}(x, y) = L_p(- x, y),$$
$$k_{p'''} = - k_{p'} = k_p \qquad L_{p'''}(x, y) = L_{p'}(- x, y) = L_p(y, - x)$$

vorhanden sein müssen, deren Vereinigung in der Darstellung von $2S(x, y)$ die Glieder

$$k_p \{(L_p(x, y))^2 - (L_p(y, x))^2 - (L_p(- x, y))^2 + (L_p(y, - x))^2\}$$

und in der Darstellung von $(x, x) + (y, y)$ die Glieder

$$(L_p(x, y))^2 + (L_p(y, x))^2 + (L_p(-x, y))^2 + (L_p(y, -x))^2$$

liefert.

Setzen wir nun für jedes solche Quadrupel

$$L_p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(O_p(x) + O_p'(y)),$$

wo $O_p(x)$ eine lineare Form von $x_1, x_2, \ldots$ und $O_p'(y)$ eine lineare Form von $y_1, y_2, \ldots$ ist, so gehen die obigen Darstellungen über in

$$S(x, y) = \sum k_p (O_p(x) O_p'(y) - O_p'(x) O_p(y)),$$

$$(x, x) + (y, y) = \sum (O_p(x))^2 + (O_p'(x))^2 + (O_p(y))^2 + (O_p'(y))^2,$$

und da $L_1(x, y)$, $L_2(x, y), \ldots$ zueinander orthogonal sind, folgt leicht auch die Orthogonalität der Formen $O_1, O_2, \ldots, O_1', O_2', \ldots$; mithin bestimmen

$$\xi_p = O_p(x), \quad \xi_p' = O_p'(x)$$

eine orthogonale Transformation von der verlangten Beschaffenheit.

Aus dieser Darstellung folgt durch eine einfache Überlegung, wie sie später ähnlich angestellt werden wird (S. 171), daß die aus $(x, y) - \lambda S(x, y)$ entspringenden inhomogenen Gleichungen eindeutig lösbar sind, außer wenn $\lambda = \frac{i}{k_1}, \frac{i}{k_2}, \ldots$ ist; für diese rein imaginären Eigenwerte der Form $S(x, y)$ haben die homogenen Gleichungen eine nicht identisch verschwindende Lösung, und zwar ist die Anzahl der voneinander unabhängigen Lösungen stets endlich.

Was schließlich die Theorie der Bilinearform betrifft, so sehen wir zunächst ohne Schwierigkeit folgende Tatsachen ein:

Wenn die Bilinearform $A(x, y)$ eine vollstetige Funktion der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ darstellt, so ist, wenn A_n den $n$ten Abschnitt der Bilinearform A bezeichnet, für jedes Wertsystem der unendlich vielen Variabeln

$$\underset{n=\infty}{L} A_n(.,x) A_n(.,x) = A(.,x) A(.,x),$$

und zwar im Sinne gleichmäßiger Konvergenz, d. h. es ist

$$(92) \qquad |A(.,x)A(.,x) - A_n(.,x)A_n(.,x)| \leqq \varepsilon_n,$$

wo ε_n gewisse von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ unabhängige, mit unendlich wachsendem n gegen Null abnehmende Größen sind. Daraus folgt, daß die quadratische Form $A(.,x)A(.,x)$ stets vollstetig ist, wenn die Bilinearform $A(x, y)$ vollstetig ist.

Eine Bilinearform $A(x, y)$ ist stets vollstetig, wenn die quadratische Form $A(.,x)A(.,x)$ vollstetig ist, also beispielsweise gewiß, wenn die

Summe der Quadrate der Koeffizienten von A endlich bleibt. In der Tat, fassen wir von $A(x, y)$ als quadratische Form der Variabeln $x_1, x_2, \ldots,$ $y_1, y_2, \ldots$ auf, so folgt aus der Ungleichung

$$|A(x, y)| \leqq \sqrt{A(.,x)A(.,x)},$$

durch die in 4. und 5. (S. 152) angewandte Schlußweise, daß $A(x, y)$ vollstetig ist.

Diesen Abschnitt wollen wir mit der Entwickelung eines Satzes beschließen, der — wie sich im folgenden Abschnitt zeigen wird — auf die einfachste Weise zur Auflösung der Integralgleichungen zweiter Art mit unsymmetrischem Kern verwandt werden kann; derselbe lautet:

Satz 40. *Wenn*

$$A(x, y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$$

eine vollstetige Bilinearform der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots,$ $y_1, y_2, \ldots$ *ist, so haben gewiß entweder die unendlichvielen Gleichungen*

$$\begin{aligned} (1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \cdots &= a_1, \\ a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \cdots &= a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{93}$$

für alle möglichen Größen $a_1, a_2, \ldots$ *mit konvergenter Quadratsumme eine eindeutig bestimmte Lösung* $x_1, x_2, \ldots$ *mit konvergenter Quadratsumme — oder die entsprechenden homogenen Gleichungen*

$$\begin{aligned} (1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \cdots &= 0, \\ a_{21}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \cdots &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{94}$$

lassen eine Lösung $x_1, x_2, \ldots$ *mit der Quadratsumme* 1 *zu.*

Zum Beweise betrachten wir zunächst irgendein System von n linearen Gleichungen und n Unbekannten mit nicht verschwindender Determinante von der Gestalt

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n &= b_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}x_1 + \cdots + b_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Bezeichnen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ die Lösungen dieser Gleichungen, so ist

$$\begin{aligned} &(b_{11}\beta_1 + \cdots + b_{1n}\beta_n)^2 + \cdots + (b_{n1}\beta_1 + \cdots + b_{nn}\beta_n)^2 \\ &= b_1(b_{11}\beta_1 + \cdots + b_{1n}\beta_n) + \cdots + b_n(b_{n1}\beta_1 + \cdots + b_{nn}\beta_n), \end{aligned}$$

und folglich wird

$$\begin{aligned} &(b_{11}\beta_1 + \cdots + b_{1n}\beta_n)^2 + \cdots + (b_{n1}\beta_1 + \cdots + b_{nn}\beta_n)^2 \\ &\leqq \sqrt{(\beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2)\{(b_{11}b_1 + \cdots + b_{n1}b_n)^2 + \cdots + (b_{1n}b_1 + \cdots + b_{nn}b_n)^2\}}. \end{aligned}$$

Nunmehr sei m das Minimum der quadratischen Form

$$(b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n)^2 + \cdots + (b_{n1}x_1 + \cdots + b_{nn}x_n)^2$$

bei der Nebenbedingung

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \tag{95}$$

und M das Maximum der quadratischen Form

$$(b_{11}x_1 + \cdots + b_{n1}x_n)^2 + \cdots + (b_{1n}x_1 + \cdots + b_{nn}x_n)^2$$

bei derselben Nebenbedingung: dann folgt aus der vorigen Ungleichung die Ungleichung

$$\beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2 \leqq (b_1^2 + \cdots + b_n^2)\frac{M}{m^2}. \tag{96}$$

Wir wenden dieses Resultat auf die Gleichungen

$$\begin{array}{c} (1 + a_{11})x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = a_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + (1 + a_{nn})x_n = a_n \end{array} \tag{97}$$

an und bezeichnen zu dem Zwecke mit m_n das Minimum der quadratischen Form

$$((1 + a_{11})x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + \cdots + (a_{2n}x_1 + \cdots + (1 + a_{nn})x_n)^2$$

bei der Nebenbedingung (95) und mit M_n das Maximum der quadratischen Form

$$((1 + a_{11})x_1 + \cdots + a_{n1}x_n)^2 + \cdots + (a_{1n}x_1 + \cdots + (1 + a_{nn})x_n)^2$$

bei derselben Nebenbedingung.

Wegen der vorausgesetzten Vollstetigkeit der Bilinearform $A(x, y)$ ist die quadratische Form der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$

$$((1 + a_{11})x_1 + a_{21}x_2 + \cdots)^2 + (a_{12}x_1 + (1 + a_{22})x_2 + \cdots)^2 + \cdots$$

gewiß eine beschränkte Form, und daraus ersehen wir, daß auch die Maxima M_n unterhalb einer endlichen, von n unabhängigen Größe M bleiben.

Was die Minima m_n betrifft, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Erstens gebe es unendlich viele n, für die die Minima m_n sämtlich größer als eine feste positive Größe m sind: dann sind für solche n die Gleichungen (97) lösbar, und es folgt aus (96), daß die Quadratsumme ihrer Lösungen unterhalb der endlichen von n unabhängigen Größe

$$(a, a)\frac{M}{m^2} \tag{98}$$

liegt.

Bezeichnen wir nun für solche n mit

$$\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)}$$

die Lösungen von (97), so können wir aus jenen n nach dem von uns oft angewandten Verfahren solche ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ herausgreifen, daß die Grenzwerte

$$\alpha_1 = \underset{h=\infty}{L}\, \alpha_1^{(n_h)}, \quad \alpha_2 = \underset{h=\infty}{L}\, \alpha_2^{(n_h)}, \ldots$$

existieren; die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ haben eine ebenfalls unterhalb der Grenze (98) liegende Quadratsumme und müssen wegen der Vollstetigkeit der Linearformen

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots$$

gewiß jede der Gleichungen des vorgelegten Systems (93) befriedigen.

Zweitens mögen die Minima $m_1, m_2, \ldots$ gegen Null konvergieren; die Werte der Variabeln mit der Quadratsumme 1, für welche diese Minima eintreten, seien

$$\mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_n^{(n)}.$$

Nun ist

$$((1+a_{11})x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + \cdots + (a_{n1}x_1 + \cdots + (1+a_{nn})x_n)^2$$
$$= A_n(.,x)A_n(.,x) + 2A_n(x,x) + (x,x)_n$$

und folglich

$$(99) \qquad A_n(.,\mu^{(n)})A_n(.,\mu^{(n)}) + 2A_n(\mu^{(n)},\mu^{(n)}) + 1 = m_n.$$

Nun denken wir uns wieder eine solche Reihe ganzer Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ herausgegriffen, daß die Grenzwerte

$$\mu_1 = \underset{h=\infty}{L}\, \mu_1^{(n_h)}, \quad \mu_2 = \underset{h=\infty}{L}\, \mu_2^{(n_h)}, \ldots$$

existieren; die Größen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ genügen dann der Bedingung

$$(100) \qquad (\mu,\mu) \leqq 1.$$

Mit Rücksicht auf (92) und wegen der Vollstetigkeit der quadratischen Form $A(x,x)$ folgt aus (99), wenn wir darin n_h an Stelle von n einsetzen und zur Grenze $h=\infty$ übergehen,

$$(101) \qquad A(.,\mu)A(.,\mu) + 2A(\mu,\mu) + 1 = 0.$$

Wir betrachten nun die quadratische Form

$$(102) \qquad \begin{aligned} &((1+a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \cdots)^2 + (a_{21}x_1 + (1+a_{22})x_2 + \cdots)^2 \\ &\quad = A(.,x)A(.,x) + 2A(x,x) + (x,x); \end{aligned}$$

da dieselbe positiv definit ist, so folgt insbesondere

$$(103) \qquad A(.,\mu)A(.,\mu) + 2A(\mu,\mu) + (\mu,\mu) \geqq 0;$$

hieraus entnehmen wir wegen (101)

$$(\mu,\mu) \geqq 1;$$

mithin ist wegen (100):

$$(\mu,\mu) = 1.$$

Nunmehr erkennen wir wegen (101), daß auch

$$A(.,\mu)A(.,\mu) + 2A(\mu,\mu) + (\mu,\mu) = 0$$

ist, d. h. im Hinblick auf (102), die Größen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ befriedigen die homogenen Gleichungen (94). Damit ist gezeigt, daß stets mindestens einer der in Satz 40 unterschiedenen Fälle stattfindet.

Wenn die homogenen Gleichungen (94) eine Lösung mit der Quadratsumme 1 besitzen, so können die durch Transposition entstehenden inhomogenen Gleichungen

$$(104)\qquad \begin{aligned} &(1+a_{11})x_1 + a_{21}x_2 + \cdots = a_1,\\ &a_{12}x_1 + (1+a_{22})x_2 + \cdots = a_2,\\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

gewiß nicht für alle $a_1, a_2, \ldots$ mit endlicher Quadratsumme eine Lösung von endlicher Quadratsumme besitzen, da ja zwischen ihren linken Seiten eine lineare Identität besteht: es müssen daher dem eben Bewiesenen zufolge alsdann die transponierten homogenen Gleichungen

$$(105)\qquad \begin{aligned} &(1+a_{11})x_1 + a_{21}x_2 + \cdots = 0,\\ &a_{12}x_1 + (1+a_{22})x_2 + \cdots = 0,\\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

eine Lösung mit der Quadratsumme 1 zulassen. Also können die inhomogenen Gleichungen (93) gewiß nicht für alle $a_1, a_2 \ldots$ eine Lösung mit endlicher Quadratsumme besitzen; daher schließen sich die beiden Fälle des Satzes 40 wirklich aus, und die Lösung im ersten Falle ist eindeutig. Damit ist der Beweis für unsern Satz völlig erbracht.

Um die Mannigfaltigkeit der Lösungen der homogenen Gleichungen (94) festzustellen, haben wir nur nötig, die in Kapitel XI entwickelte Theorie der orthogonalen Transformation der quadratischen Formen auf die Form (102) anzuwenden. Da $A(.,x)A(.,x)$ und $A(x,x)$ vollstetige quadratische Formen sind, so ist dies auch die Form

$$A(.,x)A(.,x) + 2A(x,x);$$

dieselbe besitzt daher den Wert -1 höchstens als Eigenwert von endlicher Vielfachheit; mithin besitzt die quadratische Form (102) den Wert ∞ nur als Eigenwert von endlicher Vielfachheit, d. h. es gibt eine orthogonale Transformation der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$ in $x_1', x_2', \ldots,$ so daß jene quadratische Form (102) die Gestalt

$$k_{e+1}x'^2_{e+1} + k_{e+2}x'^2_{e+2} + \cdots$$

erhält, wo $k_{e+1}, k_{e+2}, \ldots$ lauter positive, von Null verschiedene, gegen 1 konvergierende Größen und e eine endliche ganze Zahl bedeuten. Die Lösungen der homogenen Gleichungen (94) erhält man aus

$$x_1' = u_1,\quad \ldots,\quad x'_e = u_e,\quad x'_{e+1} = 0,\quad x'_{e+2} = 0,\quad \ldots,$$

wo $u_1, \ldots, u_e$ willkürliche Konstanten sind, und wir ersehen daraus, daß es nur eine endliche Anzahl, und zwar genau e linear unabhängige Lösungen von (94) gibt.

Wir erkennen ferner, daß, wenn e die genaue Anzahl der linear unabhängigen Lösungssysteme der homogenen Gleichungen

(106) $$L_p(x) = x_p + a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \cdots = 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

sind, zwischen den Linearformen $L_1(x)$, $L_2(x), \ldots$ genau e voneinander unabhängige lineare Identitäten von der Gestalt

(107) $$\beta_1^{(h)} L_1(x) + \beta_2^{(h)} L_2(x) + \cdots = 0, \qquad (h = 1, \ldots, e)$$

bestehen müssen, wobei die Koeffizienten $\beta_1^{(h)}$, $\beta_2^{(h)} \ldots$ in diesen Identitäten eine endliche Quadratsumme besitzen, und ferner, daß die inhomogenen Gleichungen (13)

$$x_p + x_1 a_{p1} + x_2 a_{p2} + \cdots = a_p, \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

nur dann und stets dann lösbar sind, wenn die Größen a_1, $a_2, \ldots$ die e Bedingungen

(108) $$\beta_1^{(h)} a_1 + \beta_2^{(h)} a_2 + \cdots = 0, \qquad (h = 1, \ldots, e)$$

erfüllen.

In der Tat, es sei wie oben e die genaue Zahl der linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichungen (106) und f die Zahl der voneinander unabhängigen Identitäten von der Gestalt (107): dann lassen sich aus den Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ gewiß e solche auswählen, daß die Gleichungen (106) keine Lösung mehr besitzen, bei der die e ausgewählten Variabeln sämtlich Null sind; wir bezeichnen die übrigbleibenden Variabeln mit x_1', $x_2', \ldots$. Wäre nun $f > e$, so müßten sich aus den Linearformen $L_1(x)$, $L_2(x), \ldots e$ solche aussuchen lassen, die lineare Kombinationen der übrigen sind, während die übrigbleibenden unendlich vielen Linearformen, die mit $L_1'(x)$, $L_2'(x), \ldots$ bezeichnet werden mögen, gewiß noch einer linearen Identität von der Gestalt

(109) $$\beta_1 L_1'(x) + \beta_2 L_2'(x) + \cdots = 0$$

genügen, wo die Koeffizienten β_1, $\beta_2, \ldots$ eine endliche Quadratsumme haben und nicht sämtlich Null sind. Wir setzen nun in den Linearformen $L_1'(x)$, $L_2'(x), \ldots$ die vorhin ausgewählten e Variabeln Null und bezeichnen die so entstehenden Linearformen der Variabeln x_1', $x_2', \ldots$ mit $L_1'(x')$, $L_2'(x'), \ldots$. Endlich bestimmen wir irgendwelche Größen a_1, $a_2, \ldots$ mit endlicher Quadratsumme, für welche

(110) $$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots \neq 0$$

ausfällt.

Wir betrachten nun das Gleichungssystem

(111) $$\begin{aligned} L_1'(x') &= a_1, \\ L_2'(x') &= a_2, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

mit den Unbekannten x_1', $x_2', \ldots$; dasselbe nimmt bei geeigneter Anordnung der Gleichungen wieder die Gestalt des Gleichungssystems (93)

an. Wir sehen dies am leichtesten ein, indem wir zum Gleichungssystem (106) den zugehörigen Bilinearausdruck

(112) $$y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \cdots = (x, y) + A(x, y)$$

bilden; darin ist $A(x, y)$ eine stetige Bilinearform der Variabeln x_1 $x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$. Der entsprechende Bilinearausdruck für das Gleichungssystem (111)

$$y_1' L_1'(x') + y_2' L_2'(x) + \cdots$$

entsteht dem Obigen zufolge, indem wir in (112) gewisse e von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ und gewisse e von den Variabeln $y_1, y_2, \ldots$ Null setzen und die übrigbleibenden Variabeln mit $x_1', x_2', \ldots$ bzw. $y_1', y_2', \ldots$ bezeichnen. Hierbei verwandelt sich nun (x, y), wenn wir noch nötigenfalls gewisse Produkte $x_h' y_h'$ in endlicher Anzahl addieren, in

$$(x', y') = x_1' y_1' + x_2' y_2' + \cdots,$$

und da sich zugleich $A(x, y)$ in eine vollstetige Bilinearform der Variabeln $x_1', x_2' \ldots, y_1', y_2', \ldots$ verwandelt, so haben wir

$$y_1' L_1'(x') + y_2' L_2'(x') + \cdots = (x', y') + A'(x', y'),$$

wo $A'(x', y')$ gewiß ebenfalls eine vollstetige Bilinearform von $x_1', x_2' \ldots, y_1', y_2' \ldots$ wird; daraus folgt die behauptete Gestalt des Gleichungssystems (111). Aus (109), (110) erkennen wir, daß das Gleichungssystem (111) keine Lösung besitzt; da aber das aus ihm durch Nullsetzen der linken Seiten entstehende homogene Gleichungssystem ebenfalls keine Lösung zuläßt, so zeigt dieser Widerspruch mit dem Satze 40 (S. 165), daß die Annahme $f > e$ unzutreffend war. Da die Anwendung des eben Bewiesenen auf das transponierte Gleichungssystem zeigt, daß auch $e > f$ unzutreffend sein muß, so ist notwendig $e = f$. Zugleich erkennen wir auch die Richtigkeit der letzten oben gemachten Aussage.

Bei der Voraussetzung, daß $A(x, y)$ eine vollstetige Bilinearform ist, kommen also dem Gleichungssysteme (93) alle wesentlichen Eigenschaften eines Systemes von endlich vielen Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten zu. —

Zum Schluß möge noch gezeigt werden, mit welch überraschender Eleganz und Einfachheit der Satz 40 ohne irgendeine neue Konvergenzbetrachtung bewiesen werden kann, indem man sich der Sätze 35 und 39 bedient.

In der Tat, aus Satz 39 leiten wir sofort folgende Tatsache ab:

Hilfssatz 6. Wenn $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ eine unendliche Reihe positiver Größen ist, die gegen 1 konvergieren und

$$S(x, y) = \sum_{(p, q)} s_{pq} x_p y_q$$

eine vollstetige schiefsymmetrische Form der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ bedeutet, so gibt es stets eine vollstetige Bilinearform $T(x, y)$ der nämlichen Variabeln, so daß

$$\{\varkappa(x, .) + S(x, .)\}\{(., y) + T(., y)\} = (x, y) \tag{113}$$

wird, wo $\varkappa(x)$ die quadratische Form

$$\varkappa(x) = \varkappa_1 x_1^2 + \varkappa_2 x_2^2 + \cdots$$

bedeutet. Die Relation (113) ist damit gleichbedeutend, daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \varkappa_1 x_1 + s_{12} x_2 + s_{13} x_3 + \cdots &= y_1, \\ s_{21} x_1 + \varkappa_2 x_2 + s_{23} x_3 + \cdots &= y_2, \\ s_{31} x_1 + s_{32} x_2 + \varkappa_3 x_3 + \cdots &= y_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{114}$$

die Auflösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \frac{\partial T(x, y)}{\partial x_1}, \\ x_2 &= y_2 + \frac{\partial T(x, y)}{\partial x_2}, \\ \cdots\cdots \end{aligned}$$

besitzt.

Zum Beweise setzen wir in $S(x, y)$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_1}} x_1', \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_2}} x_2', \ \ldots,$$
$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_1}} y_1', \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_2}} y_2', \ \ldots,$$

ein und erhalten dann eine schiefsymmetrische vollstetige Form $S'(x', y')$, während $\varkappa(x)$ in (x', x') übergeht. Aus (114) wird ein Gleichungssystem von folgender Gestalt

$$\begin{aligned} x_1' + s'_{12} x_1' + s'_{13} x_3' + \cdots &= y_1^*, \\ s'_{21} x'_1 + x_2' + s'_{23} x_3' + \cdots &= y_2^*, \\ s'_{31} x_1' + s'_{32} x_2' + x_3' + \cdots &= y_3^*, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{115}$$

Führen wir nunmehr in S' nach Satz 39 die orthogonale Transformation aus, so geht das zu S' gehörige Gleichungssystem (115) in ein Gleichungssystem von folgender Gestalt über:

$$\begin{aligned} \xi_1 + k_1 \xi_1' &= \eta_1, \\ -k_1 \xi_1 + \xi_1' &= \eta_1', \\ \xi_2 + k_2 \xi_2' &= \eta_2, \\ -k_2 \xi_2 + \xi_2' &= \eta_2', \\ \cdots\cdots \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt, wie man sieht, die Auflösungen

$$\xi_1 = \eta_1 + \frac{\partial \mathsf{T}(\xi\xi', \eta\eta')}{\partial \xi_1},$$

$$\xi_1' = \eta_1' + \frac{\partial \mathsf{T}(\xi\xi', \eta\eta')}{\partial \xi_1'},$$

$$\xi_2 = \eta_2 + \frac{\partial \mathsf{T}(\xi\xi', \eta\eta')}{\partial \xi_2},$$

$$\xi_2' = \eta_2' + \frac{\partial \mathsf{T}(\xi\xi', \eta\eta')}{\partial \xi_2'},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wenn

$$\mathsf{T}(\xi\xi', \eta\eta') = -\frac{k_1^2}{1+k_1^2}(\xi_1\eta_1 + \xi_1'\eta_1') - \frac{k_2^2}{1+k_2^2}(\xi_2\eta_2 + \xi_2'\eta_2') - \cdots$$
$$- \frac{k_1}{1+k_1^2}(\xi_1\eta_1' - \xi_1'\eta_1) - \frac{k_2}{1+k_2^2}(\xi_2\eta_2' - \xi_2'\eta_2) - \cdots$$

gesetzt wird. Da die Größen $k_1, k_2, \ldots$ gegen Null konvergieren, so ist T eine vollstetige Form.

Die Rückkehr zu den Variabeln $x_1', x_2', \ldots, y_1', y_2', \ldots$ und von diesen zu den ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$, wobei aus T die Form T entsteht, lehrt die Richtigkeit des Hilfssatzes.

Um nunmehr Satz 40 zu beweisen, bedenken wir, daß das Gleichungssystem (93) in Satz 40 seine Gestalt behält, wenn wir auf die Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ irgendeine orthogonale Transformation ausführen und zugleich entsprechend die linken Seiten jener Gleichungen orthogonal kombinieren, da dies ja auf eine simultane orthogonale Transformation beider Variabelnreihen in $A(x, y)$ hinausläuft. Der Einfachheit halber nehmen wir an, es sei bereits eine solche orthogonale Transformation der Bilinearform $A(x, y)$ ausgeführt, daß die aus $A(x, y)$ durch Gleichsetzung der beiden Variabelnreihen entspringende quadratische, vollstetige Form $A(x, x)$ nur die Quadrate der Variabeln enthält und demnach in der Gestalt

$$A(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots$$

oder

$$(116) \qquad A(x, y) + A(y, x) = 2(\alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2 + \cdots)$$

erscheint. Da hierin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ gegen Null konvergierende Größen sind, so gibt es gewiß nur eine endliche Anzahl unter ihnen, die $\leqq -1$ ausfallen; es sei etwa e eine ganze Zahl, so daß

$$(117) \qquad \alpha_{e+p} > -1, \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

ausfällt.

Alsdann sondern wir von den Gleichungen (93) in Satz 40 zunächst die ersten e Gleichungen ab und schreiben die übrigen in der Gestalt:

$$(118)\qquad \begin{aligned} (a_{e+1,e+1}+1)x_{e+1}+a_{e+1,e+2}\,x_{e+2}+\cdots &= y_{e+1}\,,\\ a_{e+2,e+1}\,x_{e+1}+(a_{e+2,e+2}+1)x_{e+2}+\cdots &= y_{e+2}\,,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots, \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$(119)\qquad \begin{aligned} y_{e+1} &= a_{e+1}-a_{e+1,1}\,x_1-\cdots-a_{e+1,e}\,x_e\,,\\ y_{e+2} &= a_{e+2}-a_{e+2,1}\,x_1-\cdots-a_{e+2,e}\,x_e\,,\\ \cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

gesetzt ist; diese Gleichungen (118) sind dann, da wegen (116)

$$a_{pq}+a_{qp}=0 \qquad (p \neq q)$$

$$a_{pp}=a_p$$

wird, mit Rücksicht auf (117) von der Gestalt (114) und gestatten demnach die Anwendung des vorhin bewiesenen Hilfssatzes.

Diesem zufolge gibt es eine vollstetige Bilinearform $T(x, y)$ der Variabeln $x_{e+1}, x_{e+2}, \ldots, y_{e+1}, y_{e+2}, \ldots$ derart, daß die Gleichungen (118) die Auflösungen

$$(120)\qquad \begin{aligned} x_{e+1} &= y_{e+1}+\frac{\partial T}{\partial x_{e+1}}\,,\\ x_{e+2} &= y_{e+2}+\frac{\partial T}{\partial x_{e+2}}\,,\\ \cdots&\cdots\cdots \end{aligned}$$

besitzen. Tragen wir diese Auflösungen unter Berücksichtigung der Werte (119) von $y_{e+1}, y_{e+2}, \ldots$ in die e ersten vorhin abgesonderten Gleichungen des vorgelegten Systems (93) ein, so entsteht ein System von e Gleichungen mit den e Unbekannten $x_1, \ldots, x_e$, wie folgt:

$$(121)\qquad \begin{aligned} E_{11}x_1+\cdots+E_{1e}x_e &= E_1\,,\\ \cdots\cdots&\cdots\cdots\\ E_{e1}x_1+\cdots+E_{ee}x_e &= E_e\,, \end{aligned}$$

wo $E_1, \ldots, E_e$ homogene Linearformen von $a_1, a_2, \ldots$ sind, während $E_{11}, \ldots, E_{ee}$ in bekannter Weise durch die Koeffizienten von $A(x, y)$ sich ausdrücken. Haben nun diese Gleichungen Lösungen $x_1, \ldots, x_e$, so berechnen sich daraus vermöge (119) und (120) die Werte $x_{e+1}, x_{e+2}, \ldots$, und wir gelangen so zu den Lösungen des ursprünglich vorgelegten Gleichungssystems (93); im anderen Falle lassen sich gewiß die homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} E_{11}x_1+\cdots+E_{1e}x_e &= 0\,,\\ \cdots\cdots&\cdots\cdots\\ E_{e1}x_1+\cdots+E_{ee}x_e &= 0 \end{aligned}$$

durch solche Werte $x_1, \ldots, x_e$ befriedigen, die nicht alle Null sind; nehmen wir alsdann an Stelle von $a_1, a_2, \ldots$ überall die Werte Null, wodurch in der Tat

$$E_1=0, \quad \ldots, \quad E_e=0$$

wird, so gelangen wir vermöge (119) und (120) zu solchen Werten $x_{e+1}, x_{e+2}, \ldots,$ die zusammen mit den gefundenen $x_1, \ldots, x_e$ ein Lösungssystem der homogenen Gleichungen (94) in Satz X ausmachen.

Damit ist Satz 40 vollständig bewiesen.

Da oben auch der Satz 39 über die schiefsymmetrischen Formen lediglich mit Hilfe des Satzes 35 über die orthogonale Transformation vollstetiger quadratischer Formen ohne irgendeine neue Konvergenzbetrachtung bewiesen worden ist, so ergibt sich, daß auch die Theorie der Gleichungen von der Gestalt (93) und damit überhaupt die Theorie der vollstetigen Bilinearform lediglich auf die Theorie der orthogonalen Transformation vollstetiger quadratischer Formen ohne neue Konvergenzbetrachtungen begründet werden kann — eine bemerkenswerte Tatsache, die der Theorie der vollstetigen Formen von unendlich vielen Variabeln eine wunderbare Durchsichtigkeit und Einheitlichkeit verleiht.

Fünfter Abschnitt.

Neue Begründung der allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

In den folgenden Kapiteln XIII—XVI wollen wir die in den Kapiteln XI—XII entwickelte Theorie der linearen, der quadratischen und bilinearen Formen mit unendlich vielen Variabeln auf die Theorie der linearen Integralgleichungen anwenden. Es werden durch dieses neue einfachere und durchsichtigere Verfahren nicht nur alle bekannten Resultate über Integralgleichungen wieder gewonnen werden, sondern es gelingt auch die Theorie der Integralgleichungen wesentlich auszudehnen und zu vervollkommnen. — Weiterhin entsteht dann die Aufgabe, die Methode der unendlich vielen Variabeln direkt ohne Vermittlung der Integralgleichungen in die Theorie der Differentialgleichungen einzuführen.

Dreizehntes Kapitel.

Die Integralgleichung mit unsymmetrischem Kern.

In Kapitel XI[1]) haben wir den Begriff „vollstetig" für eine Funktion der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ definiert[2]): wir nennen

1) Die in Kapitel XI und diesem Kapitel XIII angeregten Fragen aus der Theorie der Funktionen von unendlich vielen Variabeln habe ich in meiner Abhandlung: Wesen und Ziele einer Analysis der unendlich vielen Variabeln, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo t. XXVII (1909), weiter ausgeführt.

2) In dem ursprünglichen Abdruck meiner „fünften Mitteilung" hatte ich an Stelle des jetzt durchweg gebrauchten Wortes „vollstetig" das Wort „stetig" eingeführt.

somit eine Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ für ein bestimmtes Wertsystem derselben *vollstetig*, wenn die Werte von $F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \ldots)$ gegen den Wert $F(x_1, x_2, \ldots)$ konvergieren, wie man auch immer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ für sich zu Null werden läßt, d. h. wenn

$$\underset{\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0,\ \ldots}{L} F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \ldots) = F(x_1, x_2, \ldots)$$

wird, sobald man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ irgend solche Wertsysteme $\varepsilon_1^{(h)}, \varepsilon_2^{(h)}, \ldots$ durchlaufen läßt, daß einzeln

$$\underset{h=\infty}{L} \varepsilon_1^{(h)} = 0, \quad \underset{h=\infty}{L} \varepsilon_2^{(h)} = 0, \quad \ldots$$

ist; dabei sind die Variabeln stets an die Ungleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots \leqq 1$$

gebunden.

Wenn eine Funktion für jedes dieser Ungleichung genügende Wertsystem der Variabeln stetig ist, so heiße sie schlechthin *vollstetig*. Eine solche Funktion bleibt, wie man unmittelbar durch das bei endlicher Variabelnzahl angewandte Verfahren erkennt, für alle Werte der Variabeln absolut genommen unterhalb einer endlichen Grenze und besitzt stets ein Maximum.

Wenn wir in der Funktion F den Variabeln $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ sämtlich den Wert 0 erteilen, so heiße die so entstehende Funktion der n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ *der n-te Abschnitt* von F; derselbe werde mit $[F]_n$ oder mit F_n bezeichnet.

Ist F eine vollstetige Funktion von $x_1, x_2, \ldots$, so konvergiert das Maximum von

$$|F - F_n|$$

mit unendlich wachsendem n gewiß gegen Null. Im entgegengesetzten Falle nämlich müßte es unendlich viele Wertsysteme

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots$$

geben, so daß die Differenz

(1) $$|F(a^{(n)}) - F_n(a^{(n)})|$$

für alle n oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Größe ausfällt. Wählen wir aus jenen Wertsystemen nach einem im 4. Abschnitt oft angewandten Verfahren solche unendlich viele Wertsysteme

$$b_1^{(h)} = a_1^{(n_h)}, \quad b_2^{(h)} = a_2^{(n_h)}, \quad \ldots$$

aus, daß

$$\underset{h=\infty}{L} b_1^{(h)} = b_1, \quad \underset{h=\infty}{L} b_2^{(h)} = b_2, \quad \ldots$$

existiert, wo $b_1, b_2, \ldots$ gewisse Werte bedeuten, so ist wegen der Vollstetigkeit der Funktion F

(2) $$\underset{h=\infty}{L} F(b^{(h)}) = F(b).$$

Setzen wir nun allgemein

$$c_p^{(h)} = b_p^{(h)} \qquad (p \leqq n_h),$$
$$c_p^{(h)} = 0 \qquad (q > n_h),$$

so ist

$$\underset{h=\infty}{L} c_1^{(h)} = b_1, \quad \underset{h=\infty}{L} c_2^{(h)} = b_2, \quad \ldots$$

und folglich auch

(3) $$\underset{h=\infty}{L} F(c^{(h)}) = \underset{h=\infty}{L} F_{n_h}(b^{(h)}) = F(b);$$

die Grenzgleichungen (2), (3) widersprechen aber der obigen Annahme, wonach (1) stets oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Größe ausfallen sollte.

Aus der eben bewiesenen Tatsache, daß das Maximum von $|F - F_n|$ mit unendlich wachsendem n gegen Null konvergiert, folgern wir leicht folgende Sätze:

1. Die Abschnitte $F_n(x)$ einer vollstetigen Funktion $F(x)$ konvergieren *gleichmäßig* für alle $x_1, x_2, \ldots$ gegen $F(x)$.

2. Ist $F(x_1, x_2, \ldots)$ eine vollstetige Funktion von $x_1, x_2, \ldots$ und werden $x_1(\xi), x_2(\xi), \ldots$ solche vollstetige Funktionen der endlich vielen oder unendlich vielen Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$, daß stets

$$(x_1(\xi))^2 + (x_2(\xi))^2 + \cdots \leqq 1$$

ausfällt, so geht F in eine vollstetige Funktion der neuen Variabeln über. Insbesondere geht daher eine vollstetige Funktion durch orthogonale Transformation der Variabeln wieder in eine vollstetige Funktion über.

Wird allgemein

$$F(x_1(\xi), x_2(\xi), \ldots) = F(x(\xi)),$$
$$F_n(x_1(\xi), \ldots, x_n(\xi)) = F_n(x(\xi))$$

gesetzt, so konvergiert die Funktionenreihe

$$F_1(x(\xi)), \; F_2(x(\xi)), \; \ldots$$

gleichmäßig für alle ξ gegen $F(x(\xi))$.

3. Ist insbesondere eine vollstetige Linearform

$$L(x) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots$$

vorgelegt, so ist der $n$te Abschnitt nichts anderes als die Summe der n ersten Glieder der unendlichen Reihe rechter Hand. Nach Satz 1 konvergiert diese Summe mit wachsendem n gleichmäßig für alle $x_1, x_2, \ldots$ gegen $L(x)$. Die Konvergenz jener unendlichen Reihe ist zugleich eine absolute; denn wenn wir die Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ in irgendeiner anderen Anordnung mit $x'_1, x'_2, \ldots$ benennen, so müssen nach 1, da $L(x)$ in eine vollstetige Funktion von $x'_1, x'_2, \ldots$ übergeht, die dieser neuen Benennung entsprechend gebildeten Abschnitte der Funktion $L(x)$, d. h.

die Summen der n ersten Glieder der entsprechend umgeordneten unendlichen Reihe, ebenfalls gegen den Wert $L(x)$ konvergieren. Ebenso lehrt 2, daß, wenn wir an Stelle von $x_1, x_2, \ldots$ stetige Funktionen von endlich vielen oder unendlich vielen Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$ setzen, die der Bedingung

$$(x_1(\xi))^2 + (x_2(\xi))^2 + \cdots \leqq 1$$

genügen, die Reihe

$$L(x(\xi)) = l_1 x_1(\xi) + l_2 x_2(\xi) + \cdots$$

gleichmäßig und absolut konvergiert. Wegen des linearen und homogenen Charakters von $L(x)$ kann jene Bedingung auch durch die Bedingung

$$(x_1(\xi))^2 + (x_2(\xi))^2 + \cdots \leqq M$$

ersetzt werden, wenn M irgendeine von den Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Größe bedeutet.

Die in 3 aufgestellten Behauptungen sind auch leicht direkt beweisbar.

Als Bindeglied zwischen der Theorie der Funktionen und Gleichungen mit unendlich vielen Variabeln, wie sie im vierten Abschnitt entwickelt ist, und andererseits der Theorie der Integralgleichungen, die doch Relationen für Funktionen einer Variabeln s ausdrücken, bedarf es irgendeines Systems von unendlich vielen stetigen Funktionen

$$\Phi_1(s),\ \Phi_2(s),\ \ldots$$

der Variabeln s, die im Intervalle $s = a$ bis $s = b$ die folgenden Eigenschaften erfüllen:

I. die sogenannte *Orthogonalitäts-Eigenschaft:*

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\int_a^b \Phi_p(s)\Phi_q(s)\,ds = 0 \qquad (p \neq q),\\ &\int_a^b (\Phi_p(s))^2 ds \quad = 1; \end{aligned}$$

II. die *Vollständigkeits-Relation*, die darin besteht, daß identisch für jedes Paar stetiger Funktionen $u(s)$, $v(s)$ der Variabeln s

$$\begin{aligned}\int_a^b u(s)v(s)\,ds = &\int_a^b u(s)\Phi_1(s)\,ds \int_a^b v(s)\Phi_1(s)\,ds\\ &+ \int_a^b u(s)\Phi_2(s)\,ds \int_a^b v(s)\Phi_2(s)\,ds + \cdots\end{aligned}$$

wird.

Wir bezeichnen ein solches System von Funktionen $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots$ als ein *orthogonales vollständiges Funktionensystem* für das Intervall $s = a$ bis $s = b$.

Ist $u(s)$ irgendeine im Intervall $s=a$ bis $s=b$ stetige Funktion von s, so mögen die Integrale

$$\int_a^b u(s)\Phi_1(s)ds, \quad \int_a^b u(s)\Phi_2(s)ds, \quad \ldots$$

die Fourier-Koeffizienten der Funktion $u(s)$ in bezug auf das orthogonale vollständige Funktionensystem $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ... heißen und kurz bzw. mit

$$\{u(*)\}_1, \ \{u(*)\}_2, \ \ldots$$

bezeichnet werden, so daß allgemein

$$\{u(*)\}_p = \int_a^b u(s)\Phi_p(s)ds, \qquad (p=1,2,\ldots)$$

ist. Bei Benutzung dieser Bezeichnungsweise nimmt die obige Vollständigkeits-Relation die Gestalt an:

$$(5) \qquad \int_a^b u(s)v(s)ds = \{u(*)\}_1\{v(*)\}_1 + \{u(*)\}_2\{v(*)\}_2 + \cdots.$$

Um für ein gegebenes Intervall $s=a$ bis $s=b$ ein orthogonales vollständiges Funktionensystem zu konstruieren, bestimme man zunächst irgendein System von stetigen Funktionen

$$P_1(s), \ P_2(s), \ \ldots,$$

die die Eigenschaft besitzen, daß für eine endliche Anzahl von ihnen niemals eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten besteht, und die überdies von der Art sind, daß, wenn $u(s)$ irgendeine stetige Funktion von s, und ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet, allemal eine endliche Anzahl von Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ gefunden werden kann, so daß

$$(6) \qquad \int_a (u(s) - c_1P_1(s) - c_2P_2(s) - \cdots - c_mP_m(s))^2 ds < \varepsilon$$

ausfällt. Wie man sieht, bildet beispielsweise das System aller ganzen Potenzen von s

$$P_1(s)=1, \quad P_2(s)=s, \quad P_3(s)=s^2, \quad \ldots$$

ein Funktionensystem von der verlangten Art.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \gamma_1 P_1, \\ \Phi_2 &= \gamma_2 P_2 + \gamma_2' \Phi_1, \\ \Phi_3 &= \gamma_3 P_3 + \gamma_3' \Phi_1 + \gamma_3'' \Phi_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und können dann, wie leicht ersichtlich, der Reihe nach die Konstanten $\gamma_1; \gamma_2, \gamma_2'; \gamma_3, \gamma_3', \gamma_3''; \ldots$ so bestimmen, daß die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$

den Orthogonalitäts-Relationen (4) sämtlich Genüge leisten.[1]) Die so konstruierten Funktionen Φ_1, Φ_2, ... erfüllen alsdann auch die Vollständigkeits-Relation (5).

Um dies einzusehen, bedenken wir zunächst, daß, wenn $u(s)$ eine stetige Funktion von s ist, die Summe der Quadrate aller Fourier-Koeffizienten von $u(s)$ konvergiert und den Wert des Integrals

$$\int_a^b (u(s))^2 ds$$

niemals übersteigen kann. In der Tat ist für eine beliebige ganze Zahl n gewiß

$$\int_a^b (u(s) - \{u(*)\}_1 \Phi_1(s) - \cdots - \{u(*)\}_n \Phi_n(s))^2 ds \geqq 0$$

und mithin, wie die Rechnung lehrt,

$$\{u(*)\}_1^2 + \cdots + \{u(*)\}_n^2 \leqq \int_a^b (u(s))^2 ds;$$

also auch für die so entstehende konvergente Reihe

$$\{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \cdots \leqq \int_a^b (u(s))^2 ds.$$

Wir zeigen sodann, daß genau

(7) $$\{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \cdots = \int_a^b (u(s))^2 ds$$

ausfällt. Wäre nämlich im Gegenteil

$$\{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \cdots < \int_a^b (u(s))^2 ds$$

d. h.

(8) $$\varepsilon = \int_a^b (u(s))^2 ds - \{u(*)\}_1^2 - \{u(*)\}_2^2 - \cdots > 0,$$

so denken wir uns zu $u(s)$ und ε in (6) die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_m$ bestimmt; setzen wir

(9) $$u'(s) = c_1 P_1(s) + \cdots + c_m P_m(s) = c_1' \Phi_1(s) + \cdots + c_m' \Phi_m(s),$$

wo $c_1', \ldots, c_m'$ ebenfalls gewisse Konstanten bedeuten, so fällt

(10) $$\int_a^b (u(s) - u'(s))^2 ds < \varepsilon$$

aus. Andererseits ergibt sich mit Rücksicht auf (9) und (8)

1) Vgl. hiermit E. Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen usw., Inaugural-Dissertation (Göttingen 1905), § 3. Abgedruckt in Math. Ann. 63, S 442.

$$\int_a^b (u(s)-u'(s))^2 ds = \int_a^b (u(s) - c_1' \Phi_1(s) - \cdots - c_m' \Phi_m(s))^2 ds$$

$$= \int_a^b u(s)^2 ds - 2c_1'\{u(*)\}_1 - \cdots - 2c_m'\{u(*)\}_m + c_1'^2 + \cdots + c_m'^2$$

$$= \varepsilon + \{u(*)\}_1^2 + \{u(*)\}_2^2 + \cdots - 2c_1'\{u(*)\}_1 - \cdots - 2c_m'\{u(*)\}_m + c_1'^2 + \cdots + c_m'^2$$

$$= \varepsilon + (\{u(*)\}_1 - c_1')^2 + \cdots + (\{u(*)\}_m - c_m')^2 + \{u(*)\}^2_{m+1} + \{u(*)\}^2_{m+2} + \cdots,$$

und folglich

$$\int_a^b (u(s)-u'(s))^2 ds \geqq \varepsilon,$$

was der Ungleichung (10) widerspricht.

Damit ist die Gleichung (7) bewiesen, und aus dieser folgt, wenn wir einmal für $u(s)$ die Summe und dann die Differenz irgend zweier stetiger Funktionen nehmen und die erhaltenen Gleichungen subtrahieren, auch die allgemeine Vollständigkeits-Relation (5).

Es sei noch erwähnt, daß man in analoger Weise auch für beliebige Intervallsysteme, ferner für mehrere unabhängige Variable und auf einer beliebigen Fläche ein vollständiges orthogonales Funktionensystem konstruieren kann.

Wir zeigen zunächst, wie die Fredholmschen Sätze[1]) über die Lösung der Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern aus der im vierten Abschnitt entwickelten Theorie der linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten folgen.

Es sei die Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \tag{11}$$

vorgelegt; in derselben bedeute der Kern $K(s, t)$ eine stetige nicht notwendig symmetrische Funktion von s, t, und $f(s)$ sei ebenfalls als eine stetige Funktion gegeben; $f(s)$ möge überdies nicht identisch für alle Werte der Variabeln Null sein; $\varphi(s)$ ist die zu bestimmende Funktion. Wir bilden die Fourier-Koeffizienten von $K(s, t)$, als einer Funktion von t und alsdann die Fourier-Koeffizienten der so entstandenen Funktion von s, wie folgt:

$$k_q(s) = \{K(s,*)\}_q = \int_a^b K(s.t)\Phi_q(t)dt,$$

$$a_{pq} = \{k_q(*)\}_p = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\Phi_p(s)\Phi_q(t)ds dt.$$

---

1) Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta mathematica Bd. 27 (1903).

Setzen wir in der Vollständigkeits-Relation (5), indem wir t als Integrationsvariable nehmen

$$u(t) = v(t) = K(s, t)$$

ein, so finden wir

$$(12) \qquad \int_a^b (K(s, t))^2 dt = (k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 + \cdots.$$

Setzen wir andererseits in (5)

$$u(s) = v(s) = k_q(s),$$

so ergibt sich

$$\int_a^b (k_q(s))^2 ds = a_{1_q}{}^2 + a_{2_q}{}^2 + \cdots.$$

Aus (12) entnehmen wir die Ungleichung

$$(k_1(s))^2 + \cdots + (k_m(s))^2 \leqq \int_a^b (K(s, t))^2 dt;$$

mithin folgt aus der zuletzt gefundenen Gleichung für jedes m

$$\sum_{\substack{p=1,2,\ldots \\ q=1,\ldots,m}} a_{pq}{}^2 \leqq \int_a^b \int_a^b (K(s, t))^2 ds\, dt,$$

und daher ist auch

$$\sum_{(p, q=1, 2, \ldots)} a_{pq}{}^2 \leqq \int_a^b \int_a^b (K(s, t))^2 ds\, dt.$$

Diese Ungleichung lehrt mit Rücksicht auf eine Bemerkung in Kapitel XII (S. 165), daß die mit den Größen a_{pq} als Koeffizienten gebildete Bilinearform

$$A(x, y) = \sum_{(p, q)} a_{pq} x_p y_q$$

gewiß vollstetig in den unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ ist. Setzen wir endlich noch

$$a_p = \{f(*)\}_p = \int_a^b f(s)\, \Phi_p(s) ds,$$

so wird

$$\int_a^b (f(s))^2 ds = a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots.$$

Wegen der Stetigkeit der Bilinearform $A(x, y)$ und der eben bewiesenen Endlichkeit der Quadratsumme der $a_1, a_2, \ldots,$ ist die Anwendung des Satzes 40 (S. 165) in Kapitel XII auf jene Bilinearform $A(x, y)$ und dieses Größensystem $a_1, a_2, \ldots$ gestattet: es sei — dem ersten Falle des Satzes 40 entsprechend —

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \quad \ldots$$

ein Lösungssystem der Gleichungen (93) daselbst, d. h. es sei

(13) $$\alpha_p + a_{p1}\alpha_1 + a_{p2}\alpha_2 + \cdots = a_p, \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Wegen der Endlichkeit der Quadratsumme der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ stellt die Linearform

(14) $$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots$$

eine stetige Funktion der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ dar. Bezeichnen wir mit M eine endliche obere Grenze für die Werte des Integrales

$$\int_a^b (K(s, t))^2 dt$$

als Funktion von s, so sind wegen (12)

$$k_1(s),\ k_2(s), \ldots$$

eine unendliche Reihe stetiger Funktionen von s, deren Quadratsumme den Wert M nicht übersteigt. Setzen wir daher diese Funktionen in die Linearform (14) an Stelle der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ ein, so wird dieselbe nach dem zu Anfang dieses Kapitels XIII bewiesenen Satze 3 (S. 176) eine stetige Funktion von s: wir setzen

(15) $$\alpha(s) = \alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \cdots.$$

Hier konvergiert nach Satz 3 (176) die Reihe rechter Hand gleichmäßig für alle s; multiplizieren wir demnach (15) mit $\Phi_p(s)$ und integrieren nach s zwischen den Grenzen $s = a$ und $s = b$, so erhalten wir

$$\int_a^b \Phi_p(s)\alpha(s) ds = \alpha_1 a_{p1} + \alpha_2 a_{p2} + \cdots.$$

und wegen (13)

$$\alpha_p + \int_a^b \Phi_p(s)\alpha(s) ds = a_p$$

oder, wenn

(16) $$\varphi(s) = f(s) - \alpha(s)$$

gesetzt wird,

$$\alpha_p = \{f(*)\}_p - \{\alpha(*)\}_p = \{\varphi(*)\}_p$$

d. h. die Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ unserer linearen Gleichungen ergeben sich als die Fourier-Koeffizienten einer in s stetigen Funktion $\varphi(s)$.

Nunmehr folgt unmittelbar, *daß $\varphi(s)$ eine Lösung der ursprünglich vorgelegten Integralgleichung* (11) *ist.* In der Tat, setzen wir in der Vollständigkeitsrelation (5), indem wir t als Integrationsvariable nehmen,

$$u(t) = \varphi(t), \quad v(t) = K(s, t),$$

so ergibt sich aus derselben

(17) $$\int_a^b \varphi(t) K(s, t) dt = \alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \cdots,$$

d. h. wegen (15) und (16)

$$\int_a^b \varphi(t) K(s, t) dt = f(s) - \varphi(s). \tag{18}$$

Umgekehrt, wenn $\varphi(s)$ irgendeine in s stetige Lösung der Integralgleichung (11) oder (18) bezeichnet und dann $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Fourier-Koeffizienten dieser Lösung $\varphi(s)$ bedeuten, so folgt nach der Vollständigkeits-Relation (5) zunächst (17) und wegen (18)

$$\alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \cdots = f(s) - \varphi(s).$$

Da wegen

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots = \int_a^b (\varphi(s))^2 ds$$

die Quadratsumme der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ endlich ist, so stellt

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots$$

eine vollstetige Funktion der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ dar, und somit entnehmen wir, wie vorhin, aus der letzten Gleichung durch Multiplikation mit $\Phi_p(s)$ und Integration nach s das Gleichungssystem

$$\alpha_1 a_{p1} + \alpha_2 a_{p2} + \cdots = a_p - \alpha_p, \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Wir erkennen somit, *daß die Fourier-Koeffizienten einer Lösung der Integralgleichung stets auch ein System von Lösungen unserer linearen Gleichungen* (13) *und zwar ein solches mit endlicher Quadratsumme liefert.*

Zugleich ist klar, daß, wenn irgend e linear unabhängige Lösungen der Integralgleichung vorliegen, die aus diesen durch Bildung der Fourier-Koeffizienten entstehenden e Lösungssysteme der linearen Gleichungen ebenfalls voneinander linear unabhängig sind.

Trifft für die aus $A(x, y)$ entspringenden linearen Gleichungen der zweite Fall des Satzes 40 im vierten Abschnitte (S. 165) zu, so gibt es diesem Satze zufolge ein Lösungssystem der homogenen linearen Gleichungen (94) (S. 165); es sei alsdann

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \quad \ldots$$

ein solches Lösungssystem mit der Quadratsumme 1. Nehmen wir nunmehr in der vorigen Betrachtung

$$f(s) = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots,$$

so erweisen sich genau wie vorhin, *die Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ als die Fourier-Koeffizienten einer in s stetigen Lösung der homogenen Integralgleichung*

$$\varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0, \tag{19}$$

und wegen

$$\int_a^b (\varphi(s))^2 ds = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots = 1$$

erkennen wir, daß $\varphi(s)$ nicht identisch verschwindet.

Umgekehrt, wenn $\varphi(s)$ eine nicht identisch verschwindende Lösung der homogenen Integralgleichung (19) *ist, so liefern deren Fourier-Koeffizienten ein Lösungssystem unserer homogenen linearen Gleichungen.*

Nunmehr sei, wie in Kapitel XII S. 168, e die genaue Anzahl der linear unabhängigen Lösungssysteme der homogenen Gleichungen

$$L_p(x) = x_p + a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Die dort bewiesenen e linearen Relationen (107) sagen dann aus, daß die aus (20) durch Transposition entstehenden linearen homogenen Gleichungen

$$x_q + a_{1q}x_1 + a_{2q}x_2 + \cdots = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots)$$

die e Lösungssysteme

$$x_1 = \beta_1^{(h)}, \quad x_2 = \beta_2^{(h)}, \quad \ldots \qquad (h = 1, \ldots, e) \tag{21}$$

zulassen. Dieselben Schlüsse, die wir oben auf die ursprünglichen linearen Gleichungen und deren Lösungssystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ angewandt haben, lassen uns erkennen, daß die Größen (21) die Fourier-Koeffizienten gewisser e linear voneinander unabhängiger in s stetiger Funktionen $\psi^{(1)}(s), \ldots, \psi^{(e)}(s)$ sind, die der homogenen Integralgleichung mit dem transponierten Kern $K(t, s)$ genügen. Infolge dieses Umstandes erhalten die e Bedingungen (108) die Gestalt

$$\int_a^b \psi^{(1)}(s) f(s) ds = 0, \quad \ldots, \quad \int_a^b \psi^{(e)}(s) f(s) ds = 0. \tag{22}$$

Nach den obigen Ausführungen zieht unsere Annahme, daß die homogenen Gleichungen (20) genau e linear unabhängige Lösungen besitzen, die Folge nach sich, daß auch die homogene Integralgleichung (19) genau e linear unabhängige stetige Lösungen besitzt. Da ferner jedes System von Lösungen der inhomogenen linearen Gleichungen (13) eine Lösung der inhomogenen Integralgleichung (11) liefert und umgekehrt, *so erweisen sich alsdann die e Bedingungen* (22) *für die Funktion $f(s)$ als notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der ursprünglich vorgelegten inhomogenen Integralgleichung* (11); *dabei sind die $\psi^{(1)}(s), \ldots, \psi^{(e)}(s)$ die Lösungen der homogenen Integralgleichung mit dem transponierten Kern $K(t, s)$.*

Die erhaltenen Lösungen der Integralgleichungen (11), (19) sind von der Wahl des gerade benutzten besonderen orthogonalen vollständigen Funktionensystems $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots$ wesentlich unabhängig: in der Tat jede aus $K(s, t)$ unter Vermittlung eines anderen orthogonalen vollständigen Funktionensystems entspringende Bilinearform geht aus der Bilinearform

$A(x, y)$ durch eine simultane orthogonale Transformation der Variabeln $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$ hervor, so daß auch das neue Gleichungssystem und dessen Lösungen sich von dem ursprünglichen Gleichungssysteme und dessen Lösungen nicht wesentlich unterscheidet.

Vierzehntes Kapitel.

Die Theorie der orthogonalen Integralgleichung.

Derselbe Grundgedanke, der uns in Kapitel XIII zur Herleitung der Fredholmschen Sätze über die Lösung von Integralgleichungen zweiter Art gedient hat, ermöglicht auch die Neubegründung der im ersten Abschnitt entwickelten Theorie der Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern. Um dies einzusehen, sei eine Integralgleichung von der Gestalt

$$(23) \qquad f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt$$

vorgelegt, worin $K(s, t)$ eine stetige symmetrische Funktion von s, t, $f(s)$ eine ebenfalls gegebene stetige Funktion von s, $\varphi(s)$ die zu bestimmende Funktion von s und λ einen Parameter bedeute. Der Kürze halber werde eine Integralgleichung von der Gestalt (23) mit symmetrischem Kern als *orthogonale Integralgleichung* bezeichnet.

Wir bilden zunächst durch Vermittlung des orthogonalen vollständigen Funktionensystems $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots$ aus dem Kern $K(s, t)$ eine Bilinearform, indem wir wie in Kapitel XIII

$$(24) \qquad k_q(s) = \{K(s, *)\}_q = \int_a^b K(s, t)\,\Phi_q(t)dt,$$

$$(25) \qquad k_{pq} \;= \{k_q(*)\}_p \;= \int_a^b\int_a^b K(s, t)\,\Phi_p(s)\,\Phi_q(t)\,ds\,dt$$

setzen. Wegen der Symmetrie des Kerns $K(s, t)$ in s, t haben wir

$$k_{pq} = k_{qp},$$

und demnach ist die mit den Koeffizienten k_{pq} gebildete Bilinearform

$$(26) \qquad K(x, y) = \sum_{(p, q)} k_{pq} x_p y_q$$

eine solche symmetrische Form, wie sie aus der quadratischen Form

$$(27) \qquad K(x) = \sum_{(p, q)} k_{pq} x_p x_q$$

abgeleitet wird.

Analog wie vorhin in Kapitel XIII (S. 181) schließen wir aus der wie dort folgenden Ungleichung

$$\sum_{(p,q)} k_{pq}^2 \leqq \int_a^b\int_a^b (K(s,t))^2 ds\, dt$$

mit Hilfe des Satzes 36 in Kapitel XI, daß die aus $K(s, t)$ entsprungene quadratische Form $K(x)$ eine vollstetige Funktion der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ ist. Infolgedessen ist die Anwendung des Satzes 35 in Kapitel XI gestattet, und dieser Satz ergibt, daß jene quadratische Form durch eine orthogonale Substitution der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ in die Variabeln $x_1', x_2', \ldots$ die Gestalt

$$(28) \qquad K(x) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \cdots$$

erhält. Die Variabeln $x_1', x_2', \ldots$ sind lineare Formen der ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$. Falls nun unter den Größen $k_1, k_2, \ldots$ solche vorhanden sind, die den Wert Null haben, sondern wir die diesen Größen k zugehörigen Linearformen ab: es seien dies die Linearformen

$$x'_{h_1} = M_1(x) = m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \cdots,$$
$$x'_{h_2} = M_2(x) = m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die übrigbleibenden Größen k bezeichnen wir mit $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$; die zu diesen Größen $\varkappa$ zugehörigen Linearformen seien

$$x'_{g_1} = L_1(x) = l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \cdots,$$
$$x'_{g_2} = L_2(x) = l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Formel (28) nimmt dann die Gestalt an

$$K(x) = \varkappa_1(L_1(x))^2 + \varkappa_2(L_2(x))^2 + \cdots,$$

und da die Linearformen $L_1(x), L_2(x), \ldots, M_1(x), M_2(x), \ldots$ ein vollständiges orthogonales System bilden, so haben wir

$$(29) \qquad L_p(.)\, L_q(.) = 0, \qquad (p \neq q)$$

$$(30) \qquad L_p(.)\, L_p(.) = 1,$$
$$L_p(.) M_q(.) = 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots = (L_1(x))^2 + (L_2(x))^2 + \cdots + (M_1(x))^2 + (M_2(x))^2 + \cdots;$$

$$(31) \qquad \begin{aligned} x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots = {} & L_1(x)L_1(y) + L_2(x)L_2(y) + \cdots \\ & + M_1(x)M_2(y) + M_1(x)M_2(y) + \cdots; \end{aligned}$$

überdies ist

$$(32) \qquad K(x, .)\, L_p(.) = \varkappa_p L_p(x),$$

$$(33) \qquad K(x, .) M_p(.) = 0.$$

Da die Quadratsumme der Koeffizienten der Linearform $L_p(x)$ nach (30) den Wert 1 hat, also endlich bleibt, so ist diese Linearform eine vollstetige Funktion der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$, und wir

können sie daher in derselben Weise wie oben S. 182 die Linearform (14) behandeln: wir finden dann, daß die Reihe

(34) $$L_p(k(s)) \equiv l_{p1}k_1(s) + l_{p2}k_2(s) + \cdots$$

gleichmäßig für alle s konvergiert und also eine stetige Funktion von s bestimmt. Durch Multiplikation mit $\Phi_q(s)$ und Integration nach s erhalten wir wegen (24), (25)

$$\int_a^b L_p(k(s))\,\Phi_q(s)\,ds = l_{p1}k_{q1} + l_{p2}k_{q2} + \cdots.$$

Andererseits liefert die Vergleichung der Koeffizienten von x_q auf beiden Seiten von (32)

$$l_{p1}k_{q1} + l_{p2}k_{q2} + \cdots = \varkappa_p l_{pq},$$

und folglich ist

$$\int_a^b L_p(k(s))\,\Phi_q(s)\,ds = \varkappa_p l_{pq}.$$

Setzen wir

(35) $$L_p(k(s)) = \varkappa_p \varphi_p(s),$$

so ist, da ja $\varkappa_p \neq 0$ ausfällt, $\varphi_p(s)$ eine ebenfalls in s stetige Funktion, die die Gleichung

(36) $$\int_a^b \varphi_p(s)\,\Phi_q(s)\,ds = l_{pq}$$

erfüllt, d. h. die Koeffizienten l_{p1}, l_{p2}, ... der Linearform $L_p(x)$ sind die Fourier-Koeffizienten einer gewissen stetigen Funktion $\varphi_p(s)$ in bezug auf das vollständige orthogonale Funktionensystem Φ_1, Φ_2, ...

Nehmen wir nun in der Vollständigkeits-Relation (5)

$$u(s) = \varphi_p(s), \quad v(s) = \varphi_q(s),$$

so lehrt diese

$$\int_a^b \varphi_p(s)\varphi_q(s)\,ds = l_{p1}l_{q1} + l_{p2}l_{q2} + \cdots = L_p(.)L_q(.)$$

und folglich wegen (29) und (30)

$$\int_a^b \varphi_p(s)\varphi_q(s)\,ds = 0 \qquad (p \neq q),$$

(37) $$\int_a^b (\varphi_p(s))^2 ds \quad = 1,$$

d. h. *die Funktionen* $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... *bilden ein orthogonales Funktionensystem.*

Nehmen wir ferner in der Vollständigkeits-Relation (5) t als Integrationsvariable und setzen

$$u(t) = K(s, t), \quad v(t) = \varphi_p(t),$$

so folgt mit Rücksicht auf (34) und (35)

$$(38)\qquad \int_a^b K(s,t)\varphi_p(t)\,dt = k_1(s)l_{p1} + k_2(s)l_{p2} + \cdots = \varkappa_p\varphi_p(s),$$

oder, wenn wir

$$\lambda_p = \frac{1}{\varkappa_p}$$

einführen,

$$(39)\qquad \varphi_p(s) = \lambda_p\int_a^b K(s,t)\varphi_p(t)\,dt,$$

d. h. *die zu unserer ursprünglich vorgelegten Integralgleichung* (23) *gehörige homogene Integralgleichung*

$$(40)\qquad \varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt = 0$$

besitzt für $\lambda = \lambda_p$ *die wegen* (37) *gewiß nicht identisch verschwindende Lösung* $\varphi(s) = \varphi_p(s)$.

Wir wenden uns nun zu der wichtigsten Frage, nämlich zur Frage nach der Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion in eine Reihe, die nach den Funktionen des orthogonalen Systems $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... fortschreitet.

Da die Linearform $M_p(x)$ eine vollstetige Funktion der unendlichvielen Variabeln x_1, x_2, ... darstellt, so erkennen wir genau wie oben S. 182, daß

$$M_p(k(s)) = m_{p1}k_1(s) + m_{p2}k_2(s) + \cdots$$

gleichmäßig für alle s konvergiert und eine stetige Funktion von s bestimmt, und hieraus wiederum schließen wir wie oben

$$\int_a^b M_p(k(s))\,\Phi_q(s)\,ds = m_{p1}k_{q1} + m_{p2}k_{q1} + \cdots.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von x_q auf beiden Seiten von (33) erhalten wir

$$m_{p1}k_{q1} + m_{p2}k_{q2} + \cdots = 0,$$

und folglich ist auch

$$\int_a^b M_p(k(s))\,\Phi_q(s)\,ds = 0, \qquad (q = 1, 2, \ldots);$$

hieraus aber schließen wir sofort, indem wir in der Vollständigkeits-Relation (5)

$$u(s) = v(s) = M_p(k(s))$$

einsetzen,

$$\int_a^b (M_p(k(s))^2\,ds = 0,$$

d. h. es ist identisch für alle Werte s

$$M_p(k(s)) = 0.$$

Nunmehr wenden wir die Identität (31) an; wir betrachten zunächst den darin rechter Hand vorkommenden Ausdruck

(41) $$L_1(x)L_1(y) + L_2(x)L_2(y) + \cdots.$$

Wenn wir hierin den Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ irgendwelche konstante Werte mit endlicher Quadratsumme erteilen, so stellt wegen

$$(L_1(x))^2 + (L_2(x))^2 + \cdots \leqq (x, x)$$

der Ausdruck (41) eine vollstetige lineare Funktion von $L_1(y), L_2(y), \ldots$ dar; der Tatsache 3 (S. 176) zufolge muß (41) demnach gleichmäßig und absolut konvergieren für alle Werte von $y_1, y_2, \ldots$, für die

$$(L_1(y))^2 + (L_2(y))^2 + \cdots$$

unterhalb einer von $y_1, y_2, \ldots$ unabhängigen Grenze bleibt, und dies ist wegen

$$(L_1(y))^2 + (L_2(y))^2 + \cdots \leqq (y, y)$$

gewiß immer der Fall, wenn (y, y) unterhalb einer endlichen Grenze bleibt.

Wir verstehen nunmehr unter $g(s)$ eine willkürliche in s stetige Funktion und setzen in der Identität (31) an Stelle der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ die Konstanten

(42) $$x_p = \{g(*)\}_p,$$

deren Quadratsumme

$$\{g(*)\}_1^2 + \{g(*)\}_2^2 + \cdots = \int_a^b (g(s))^2 ds$$

endlich ist, und an Stelle der Variabeln $y_1, y_2, \ldots$ die in s stetigen Funktionen

(43) $$y_p = k_p(s) = \{K(s, *\}_p,$$

deren Quadratsumme

$$(k_1(s))^2 + (k_2(s))^2 + \cdots = \int_a^b (K(s, t))^2 dt$$

gewiß unterhalb einer von s unabhängigen Grenze, nämlich dem maximalen Werte M des rechts stehenden Integrales liegt. Mit Rücksicht auf die Vollständigkeits-Relation erhält dann die linke Seite jener Identität (31) den Wert

$$\int_a^b K(s, t) g(t) dt.$$

Andererseits wird bei Heranziehung der Gleichung (36) und der Vollständigkeits-Relation

$$L_p(\{g(*)\}) = l_{p1}\{g(*)\}_1 + l_{p2}\{g(*)\}_2 + \cdots = \int_a^b g(s)\varphi_p(s)ds,$$

und da $M_p(k(s))$ identisch verschwindet, so geht die rechte Seite jener Identität (31) mit Rücksicht auf (35) nach der Substitution (42), (43) in

$$\left(\int_a^b g(s)\varphi_1(s)ds\right)(\varkappa_1\varphi_1(s)) + \left(\int_a^b g(s)\varphi_2(s)ds\right)(\varkappa_2\varphi_2(s)) + \cdots$$

über. Setzen wir daher

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)g(t)dt \tag{44}$$

und, indem wir (38) berücksichtigen,

$$c_p = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)ds = \varkappa_p\int_a^b g(t)\varphi_p(t)dt,$$

so führt die Vergleichung beider Seiten jener Identität zu der Formel

$$f(s) = c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + \cdots,$$

wo die Reihe rechter Hand nach den obigen Ausführungen gleichmäßig und absolut konvergiert; d. h. *jede durch Vermittlung einer stetigen Funktion* $g(s)$ *in der Gestalt* (44) *darstellbare Funktion* $f(s)$ *läßt sich auf Fouriersche Weise in eine nach den orthogonalen Funktionen* $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ *fortschreitende, gleichmäßig und absolut konvergente Reihe entwickeln.*[1])

Wir haben oben erkannt, daß die homogene Integralgleichung (40) für $\lambda = \lambda_p$ eine nicht verschwindende Lösung besitzt; *sie besitzt auch nur für diese Werte* $\lambda = \lambda_p$ *eine nicht verschwindende Lösung.* In der Tat, ist λ ein von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ verschiedener Wert und $\varphi(s)$ eine stetige jener Integralgleichung (40) genügende Funktion, so lehrt diese Integralgleichung, daß $\varphi(s)$ eine in der Gestalt (44) darstellbare Funktion ist; nach dem eben bewiesenen Entwicklungssatze haben wir mithin

$$\varphi(s) = \varphi_1(s)\int_a^b \varphi(s)\varphi_1(s)ds + \varphi_2(s)\int_a^b \varphi(s)\varphi_2(s)ds + \cdots. \tag{45}$$

Nun finden wir andererseits, indem wir (39) mit $\lambda\varphi(s)$ multiplizieren und nach s integrieren, ferner (40) mit $\lambda_p\varphi_p(s)$ multiplizieren und nach s integrieren und endlich die so entstehenden Gleichungen voneinander subtrahieren

1) Diesen Entwicklungssatz hatte ich in der ursprünglichen Veröffentlichung meiner „ersten Mitteilung" lediglich unter der Annahme eines „allgemeinen" Kerns bewiesen bzw. bei beliebigem Kern noch die Darstellbarkeit von $f(s)$ durch den zweifach zusammengesetzten Kern $KK(s,t)$ als Bedingung hingestellt; E. Schmidt ist es zuerst in seiner Inaugural-Dissertation (Göttingen, 1905) gelungen, diese Einschränkung zu beseitigen.

$$(\lambda - \lambda_p)\int_a^b \varphi(s)\varphi_p(s)ds = 0,$$

d. h. wegen $\lambda \neq \lambda_p$

$$\int_a^b \varphi(s)\varphi_p(s)ds = 0;$$

und folglich wegen (45)

$$\varphi(s) = 0.$$

Da die oben S. 186 eingeführten Größen $k_1, k_2, \ldots$ dem dort angewandten Satze 40 in Kapitel XII zufolge notwendig gegen Null konvergieren, so können die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ im Endlichen keine Verdichtungsstelle haben, und es kann daher insbesondere jedesmal nur eine endliche Anzahl von gleichem Werte unter ihnen geben. Sei etwa

$$\lambda_p = \lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \cdots = \lambda_{p+n-1}$$

und jeder andere Eigenwert von λ_p verschieden, so sind die n linear von einander unabhängigen Funktionen

(46) $$\varphi_p, \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_{p+n-1}$$

gewiß Lösungen der homogenen Integralgleichung für $\lambda = \lambda_p$. *Es gibt nun für $\lambda = \lambda_p$ auch keine andere Lösung jener Integralgleichung, die nicht eine lineare Kombination der n Lösungen* (46) *wäre.* In der Tat, ist $\varphi(s)$ irgendeine Lösung der Integralgleichung (40) für $\lambda = \lambda_p$, so könnten wir wie vorhin den Ansatz (45) machen; das entsprechende Verfahren führt dann zu der Gleichung

$$(\lambda_p - \lambda_q)\int_a^b \varphi(s)\varphi_q(s)ds = 0$$

d. h. es wird

$$\int_a^b \varphi(s)\varphi_q(s)ds = 0$$

für alle Werte von q mit Ausnahme der n Werte

$$q = p, \quad p+1, \quad \ldots, \quad p+n-1;$$

damit ist die Behauptung bewiesen.

Was die inhomogene Integralgleichung (25) betrifft, so hat dieselbe nach den allgemeinen Ausführungen im vorigen Kapitel XIII für jedes von λ_p verschiedene λ eine und nur eine Lösung $\varphi(s)$; für $\lambda = \lambda_p$ jedoch ist sie nur lösbar, wenn $f(s)$ genau n lineare von einander unabhängige Integralbedingungen erfüllt. Nun ergibt sich aber, wenn wir die Gleichung

(47) $$f(s) = \varphi(s) - \lambda_p\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

mit $\varphi_q(s)$ multiplizieren und nach s integrieren

$$\int_a^b \varphi_q(s) f(s) ds = \int_a^b \varphi_q(s) \varphi(s) ds - \lambda_p \int_a^b \int_a^b K(s, t) \varphi_q(s) \varphi(t) ds dt$$

und mit Rücksicht auf die Symmetrie von $K(s, t)$ wegen (39), wenn $\varphi_p(s)$ eine der n Funktionen (46) bedeutet:

$$\int_a^b \varphi_q(s) f(s) ds = 0 \qquad (q = p, p+1, \ldots, p+n-1).$$

Diese n Bedingungen sind daher notwendig und hinreichend zur Lösbarkeit der inhomogenen Integralgleichung (47).

Die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ und die zugehörigen Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ sind wesentlich durch den Kern $K(s, t)$ bestimmt; ich habe sie *Eigenwerte* bzw. *Eigenfunktionen* des Kerns $K(s, t)$ genannt.

Aus dem Entwickelungssatze folgt wegen

$$\int_a^b f(s) \varphi_p(s) ds = \frac{1}{\lambda_p} \int_a^b g(t) \varphi_p(t) dt \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

sofort

$$(48) \quad \begin{aligned} f(s) = \int_a^b K(s, t) g(t) dt = \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b g(t) \varphi_1(t) dt \cdot \varphi_1(s) \\ + \frac{1}{\lambda_2} \int_a^b g(t) \varphi_2(t) dt \cdot \varphi_2(s) + \cdots . \end{aligned}$$

Besitzt ein Kern $K(s, t)$ nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so bricht die Reihe rechts beim $n$ten Gliede ab, und da diese Gleichung für jede stetige Funktion $g(t)$ statthaben muß, so ergibt sich

$$K(s, t) = \frac{\varphi_1(s) \varphi_1(t)}{\lambda_1} + \cdots + \frac{\varphi_n(s) \varphi_n(t)}{\lambda_n},$$

d. h. $K(s, t)$ *vermag*, wenn man eine der beiden Variabeln, etwa t, als Parameter auffaßt und diesem irgendwelche konstanten Werte erteilt, *nur n linear unabhängige Funktionen der anderen Variabeln s darzustellen; insbesondere ist gewiß ein Eigenwert immer vorhanden, wenn nicht $K(s, t)$ identisch in s, t verschwindet.*

Schreibt man in (48) an Stelle von $g(t)$ die willkürliche Funktion $u(t)$, multipliziert diese Formel mit $u(s)$ und integriert nach s, so entsteht

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t) u(s) u(t) ds dt = \frac{1}{\lambda_1} \left\{ \int_a^b u(t) \varphi_1(t) dt \right\}^2 + \frac{1}{\lambda_2} \left\{ \int_a^b u(t) \varphi_2(t) dt \right\}^2 + \cdots .$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$J(u) = \int_a^b\int_a^b K(s, t) u(s) u(t) ds\, dt,$$

$$u_p = \int_a^b u(t) \varphi_p(t) dt,$$

so nimmt jene Formel die Gestalt an

$$J(u) = \frac{u_1^2}{\lambda_1} + \frac{u_2^2}{\lambda_2} + \cdots.$$

Andererseits haben wir

$$\int_a^b (u(s))^2 ds \geqq u_1^2 + u_2^2 + \cdots$$

und folglich

$$J(u) - \frac{1}{\lambda_1}\int_a^b (u(s))^2 ds \leqq \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) u_2^2 + \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1}\right) u_3^2 + \cdots.$$

Nehmen wir nun an, daß die Eigenwerte nicht sämtlich negativ seien und bedeutet dann λ_1 den kleinsten positiven Eigenwert, so fällt die rechte Seite dieser Formel gewiß nicht positiv aus; hieraus folgt, daß *der größte Wert, den das Doppelintegral $J(u)$ annimmt, wenn $u(s)$ eine stetige, der Bedingung*

$$\int_a^b (u(s))^2 ds = 1$$

genügende Funktion sein soll, gleich dem reziproken Werte des kleinsten positiven Eigenwertes von $K(s, t)$ ist; dieses Maximum tritt ein, wenn $u(s)$ gleich der zugehörigen Eigenfunktion genommen wird.

Zum Schlusse dieses Kapitels berühren wir noch die wichtige Frage, unter welchen Umständen die Eigenfunktionen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... des Kerns $K(s, t)$ ein *vollständiges* orthogonales Funktionensytem bilden. Wie schon in Kapitel IV angegeben ist, *bilden die Eigenfunktionen gewiß dann ein vollständiges orthogonales Funktionensystem, wenn der Kern $K(s, t)$ der orthogonalen Integralgleichung allgemein* (Kapitel IV S. 25) *ist.* In der Tat, ist $g(s)$ irgendeine stetige Funktion von s, so gibt es dann eine stetige Funktion $h(s)$, so daß die Ungleichung

$$\int_a^b \left\{ g(s) - \int_a^b K(s, t) h(t) dt \right\}^2 ds < \varepsilon$$

gilt; daher wird, indem wir

$$\int_a^b K(s, t) h(t) dt = c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) + \cdots$$

einsetzen, auch

$$\int_a^b \{g(s) - c_1\varphi_1(s) - c_2\varphi_2(s) - \cdots\}^2 dt < \varepsilon.$$

Da die linke Seite durch Subtraktion der positiven Größe

$$\left(c_1 - \int_a^b g(s)\varphi_1(s)\,ds\right)^2 + \left(c_2 - \int_a^b g(s)\varphi_2(s)\,ds\right)^2 + \cdots$$

sicher nicht vergrößert wird, so folgt leicht

$$\int_a^b (g(s))^2 ds - \left(\int_a^b g(s)\varphi_1(s)\,ds\right)^2 - \left(\int_a^b g(s)\varphi_2(s)\,ds\right)^2 - \cdots < \varepsilon.$$

Bedenken wir, daß diese Ungleichung für beliebig kleine positive ε gelten muß, so ergibt sich sofort die zu beweisende Vollständigkeits-Relation.

Eine andere Bedingung dafür, daß die Eigenfunktionen von $K(s, t)$ ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden, ist die Abgeschlossenheit der aus K entspringenden quadratischen Form $K(x)$. Man erkennt auch leicht, daß die aus einem allgemeinen Kerne $K(s, t)$ entspringende quadratische Form stets abgeschlossen sein muß, womit die soeben bewiesene Behauptung übereinstimmt.

Wie wir sehen, sind die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ und Eigenfunktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ und deren Eigenschaften von der Wahl des gerade benutzten besonderen orthogonalen vollständigen Funktionensystems $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s), \ldots$ wesentlich unabhängig: in der Tat, jede aus $K(s, t)$ unter Vermittelung eines anderen orthogonalen vollständigen Funktionensystems entspringende quadratische Form geht aus der quadratischen Form $K(x)$ durch eine orthogonale Transformation der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ hervor, so daß die neuen Linearformen von den ursprünglichen sich nicht wesentlich unterscheiden.

Ist $\mathfrak{K}(s, t)$ eine nicht symmetrische Funktion der im Intervall a bis b sich bewegenden Variabeln s, t und setzt man

$$\begin{aligned} K(s, t) &= 0 && \text{für } a \leqq s < b, && a \leqq t < b, \\ &= \mathfrak{K}(s, t - b + a) && \text{„} \quad a \leqq s < b, && b \leqq t \leqq 2b - a, \\ &= \mathfrak{K}(t, s - b + a) && \text{„} \quad b \leqq s \leqq 2b - a, && a \leqq t < b, \\ &= 0 && \text{„} \quad b \leqq s \leqq 2b - a, && b \leqq t \leqq 2b - a, \end{aligned}$$

so stellt $K(s, t)$ eine symmetrische Funktion der im Intervall a bis $2b - a$ sich bewegenden Variabeln s, t dar. Die Anwendung meiner Theorie auf diesen Kern $K(s, t)$ führt unmittelbar zu den Entwickelungssätzen von E. Schmidt[1]), betreffend den unsymmetrischen Kern $\mathfrak{K}(s, t)$.

1) a. a. O. § 12—§ 14

Fünfzehntes Kapitel.

Die Theorie der polaren Integralgleichung.

Wenn $k(s)$ irgendeine gegebene Funktion von s bedeutet, so möge allgemein

$$f(s) = k(s)\varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

eine *Integralgleichung dritter Art* heißen. Es sei im folgenden $K(s,t)$ eine symmetrische Funktion von s, t mit der Eigenschaft eines positiv definiten Kerns, d. h., wenn $u(s)$ irgendeine stetige Funktion bedeutet, so möge immer

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)u(s)u(t)\,ds\,dt \geqq 0$$

ausfallen; ferner setzen wir insbesondere

$$k(s) = V(s),$$

wo $V(s)$ eine Funktion von s bedeutet, die streckenweise abwechselnd die konstanten Werte $+1$ oder -1 und überhaupt keine anderen Werte annimmt und zwar so, daß $V(s)$ wenigstens an einer Stelle innerhalb des Intervalls a bis b und sicher nur an endlich vielen Stellen sein Zeichen ändert; die so entstehende Integralgleichung

$$f(s) = V(s)\varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{49}$$

mit symmetrischem definitem Kern werde der Kürze halber als *polare Integralgleichung* bezeichnet.

Mit Hilfe unserer Theorie der quadratischen Formen unendlich vieler Variabler gelingt es, für die polare Integralgleichung eine analoge Theorie zu entwickeln wie für die orthogonale Integralgleichung. Dabei bedarf es als Bindeglied und zur Vermittelung zwischen Integralgleichung und quadratischer Form irgendeines Systems von unendlichvielen Funktionen

$$\Pi_1(s),\ \Pi_2(s), \ldots$$

der Variabeln s, die im Intervall $s = a$ bis $s = b$ stetig ev. abteilungsweise stetig mit endlichvielen Sprungstellen an bestimmten Punkten des Intervalles sind und die folgenden Eigenschaften erfüllen:

I. die *Polaritäts-Eigenschaft*

$$(50)\qquad \begin{aligned} \int_a^b V(s)\Pi_p(s)\Pi_q(s)\,ds &= 0 \qquad (p \neq q),\\ \int_a^b V(s)(\Pi_p(s))^2\,ds &= v_p, \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$v_1 = +1, \quad v_2 = -1, \quad v_3 = +1, \quad v_4 = -1, \quad v_5 = +1, \quad \ldots$$

gesetzt ist;

II. die *Vollständigkeits-Relation*, die darin besteht, daß identisch für jedes Paar stetiger Funktionen $u(s)$, $v(s)$ der Variabeln s

$$\int_a^b V(s)u(s)ds = v_1\int_a^b V(s)u(s)\Pi_1(s)ds\int_a^b V(s)v(s)\Pi_1(s)ds$$
$$+ v_2\int_a^b V(s)u(s)\Pi_2(s)ds\int_a^b V(s)v(s)\Pi_2(s)ds + \cdots$$

wird.

Wir bezeichnen ein solches System von Funktionen $\Pi_1(s)$, $\Pi_2(s), \ldots$ als ein *polares vollständiges Funktionensystem* für das Intervall $s = a$ bis $s = b$.

Ist $u(s)$ irgendeine im Intervall $s = a$ bis $s = b$ stetige Funktion von s, so mögen die Integrale

$$v_1\int_a^b V(s)u(s)\Pi_1(s)ds, \quad v_2\int_a^b V(s)u(s)\Pi_2(s)ds, \quad \ldots$$

die *Fourier-Koeffizienten* der Funktion $u(s)$ in bezug auf das polare vollständige Funktionensystem $\Pi_1(s)$, $\Pi_2(s), \ldots$ heißen und mit

$$[u(*)]_1, \ [u(*)]_2, \ldots$$

bezeichnet werden, so daß allgemein

$$[u(*)]_p = v_p\int_a^b V(s)u(s)\Pi_p(s)ds \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

wird.

Bei Benutzung dieser Bezeichnungsweise nimmt die obige Vollständigkeits-Relation die Gestalt an:

$$(51) \qquad \int_a^b V(s)u(s)v(s)ds = v_1[u(*)]_1[v(*)]_1 + v_2[u(*)]_2[v(*)] + \cdots.$$

Um für das Intervall a bis b ein polares vollständiges Funktionensystem zu konstruieren, fassen wir einmal die Teilintervalle ins Auge, in denen

$$V(s) = +1$$

ausfällt, und bestimmen für dieses Intervallsystem ein orthogonales vollständiges Funktionensystem:

$$\Phi_1^{(+)}(s), \ \Phi_2^{(+)}(s), \ \ldots;$$

sodann fassen wir die Teilintervalle ins Auge, in denen

$$V(s) = -1$$

ausfällt, und bestimmen für dieses Intervallsystem ebenfalls ein orthogonales vollständiges Funktionensystem

$$\Phi_1^{(-)}(s),\ \Phi_2^{(-)}(s),\ \ldots .$$

Setzen wir nunmehr

$$\begin{aligned}
\Pi_1(s) &= \Phi_1^{(+)}(s),\\
\Pi_2(s) &= 0,\\
\Pi_3(s) &= \Phi_2^{(+)}(s),\\
\Pi_4(s) &= 0,\\
\Pi_5(s) &= \Phi_3^{(+)}(s),\\
&\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

sobald s in einem der ersteren Teilintervalle liegt, und

$$\begin{aligned}
\Pi_1(s) &= 0,\\
\Pi_2(s) &= \Phi_1^{(-)}(s),\\
\Pi_3(s) &= 0,\\
\Pi_4(s) &= \Phi_2^{(-)}(s),\\
\Pi_5(s) &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

sobald s in einem der letzteren Teilintervalle liegt, so erkennen wir sofort, daß die so definierten Funktionen $\Pi_1(s)$, $\Pi_2(s)$, ... sowohl die Polaritäts-Eigenschaft besitzen, als auch die Vollständigkeits-Relation erfüllen.

Wir bilden nun durch Vermittelung des polaren vollständigen Funktionensystems $\Pi_1(s)$, $\Pi_2(s)$, ... aus dem Kern $K(s,t)$ der vorgelegten polaren Integralgleichung eine Bilinearform, indem wir analog wie in Kapitel XIV

$$(52)\quad \begin{aligned}
k_q(s) &= [K(s,*)]_q = v_q\int_a^b V(t)K(s,t)\Pi_q(t)\,dt,\\
k_{pq} &= [k_q(*)]_p = v_p v_q\int_a^b\int_a^b V(s)\,V(t)K(s,t)\,\Pi_p(s)\,\Pi_q(t)\,ds\,dt
\end{aligned}$$

setzen. Wegen der Symmetrie von $K(s,t)$ in s, t haben wir

$$k_{pq} = k_{qp},$$

und demnach ist die mit den Koeffizienten k_{pq} gebildete Bilinearform

$$K(x,y) = \sum_{(p,q)} k_{pq}x_p y_q$$

eine solche, wie sie aus der quadratischen Form

$$(53)\quad K(x) = \sum_{(p,q)} k_{pq}x_p x_q$$

abgeleitet wird.

Nun ist unser spezielles Polarsystem $\Pi_1(s), \Pi_2(s), \ldots$, wie sich unmittelbar aus seiner Definition ergibt, auch zugleich ein orthogonales vollständiges Funktionensystem für das Intervall a bis b; für den in dieser Auffassung gebildeten Fourier-Koeffizienten einer Funktion $u(s)$ ergibt sich leicht

$$\{u(*)\}_p = \int_a^b u(t)\Pi_p(t)\,dt = v_p \int_a^b V(t)u(t)\Pi_p(t)\,dt = [u(*)]_p,$$

und daher sind insbesondere auch k_{pq} als Fourier-Koeffizienten von $K(s, t)$ in bezug auf ein orthogonales System anzusehen; wir können also genau wie in Kapitel XIV (S. 186) schließen, daß $K(x)$ eine vollstetige Funktion der unendlichvielen Variabeln ist. Überdies ist $K(x)$ eine positiv definite Form; denn der $n$te Abschnitt derselben läßt sich in die Gestalt bringen

$$K_n(x) = \sum_{(p, q = 1, 2, \ldots, n)} v_p v_q x_p x_q \int_a^b\int_a^b V(s)\,V(t)\,K(s, t)\,\Pi_p(s)\,\Pi_q(t)\,ds\,dt$$

$$= \int_a^b\int_a^b K(s, t)P(s)P(t)\,ds\,dt,$$

worin zur Abkürzung

$$P(s) = \sum_{(p = 1, 2, \ldots, n)} v_p x_p V(s)\,\Pi_p(s)$$

gesetzt ist; das letztere Doppelintegral besitzt aber gewiß keine negativen Werte, da $K(s, t)$ nach Voraussetzung ein positiv definiter Kern ist.

Infolge dieser Tatsachen ist die Anwendung des Satzes 38* in Kapitel XII (S. 162) auf die Form $K(x)$ und die mit abwechselnden Vorzeichen gebildete Form

$$V(x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \cdots = x_1^2 - x_2^2 + - \cdots$$

gestattet, und dieser Satz liefert für jene quadratische Form eine Darstellung

$$K(x) = A_1^2(x) + A_2^2(x) + \cdots; \tag{54}$$

darin sind $A_1(x), A_2(x) \ldots$ stetige Linearformen, die den Relationen

$$A_p(.)\,V(.\,,.)\,A_q(.) = 0 \qquad (p \neq q), \tag{55}$$

$$A_p(.)\,V(.\,,.)\,A_p(.) = \mathfrak{k}_p \tag{56}$$

genügen, wo $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots$, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden, gegen Null konvergente Größen sind. Aus (54), (55), (56) folgt überdies

$$A_p(.)\,V(.\,,.)K(.\,, x) = \mathfrak{k}_p A_p(x). \tag{57}$$

Aus den obigen Bemerkungen über die orthogonale Natur des Funktionensystems $\Pi_1(s), \Pi_2(s), \ldots$ folgt auch wie oben

$$\int_a^b ((K(s, t))^2\,dt = k_1^2(s) + k_2^2(s) + \cdots.$$

Setzen wir daher

$$A_p(x) = \lambda_{p1}x_1 + \lambda_{p2}x_2 + \cdots \qquad (p = 1, 2, \cdots),$$

so finden wir analog wie in Kapitel XIV, daß die Reihe

(58) $$A_p(vk(s)) \equiv \lambda_{p1}v_1k_1(s) + \lambda_{p2}v_2k_2(s) + \cdots$$

gleichmäßig konvergiert und also eine stetige Funktion in s bestimmt. Durch Multiplikation mit $v_q V(s) \Pi_q(s)$ und Integration nach s erhalten wir wegen (52)

$$[A_p(vk(*))]_q = \lambda_{p1}v_1k_1 + \lambda_{p2}v_2k_{q2} + \cdots.$$

Andererseits liefert die Vergleichung der Koeffizienten von x_q auf beiden Seiten von (57)

$$\lambda_{p1}v_1k_{q1} + \lambda_{p2}v_2k_{q2} + \cdots = \mathfrak{k}_p\lambda_{pq},$$

und folglich ist

(59) $$[A_p(vk(*))]_q = \mathfrak{k}_p\lambda_{pq}.$$

Ist nun insbesondere $\mathfrak{k}_p = 0$, so folgt aus (59) — da ja nach einer obigen Bemerkung die Größen $[A_p(vk(*))]_q$ auch zugleich Fourier-Koeffizienten in bezug auf ein orthogonales vollständiges System sind — wie oben (S. 189), daß die Funktion $A_p(vk(s))$ identisch Null ist. Andererseits bezeichnen wir die von Null verschiedenen Größen $\mathfrak{k}_{p'}$ mit $\varkappa_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ und die entsprechenden Linearformen $A_{p'}$ mit A'_p sowie deren Koeffizienten mit $\lambda'_{p1}, \lambda'_{p2}, \ldots$; setzen wir dann

(60) $$A'_p(vk(s)) = |\varkappa_p|^{\frac{3}{2}} V(s)\pi_p(s),$$

so sind $\pi_1(s), \pi_2(s), \ldots$ abteilungsweise stetige Funktionen von s, für die wegen (59)

$$[V(*)\pi_p(*)_q] = (\pm 1)_p \frac{\lambda'_{pq}}{|\varkappa_p|^{\frac{1}{2}}}$$

wird, wo $(\pm 1)_p$ den Wert $+1$ oder -1 bedeuten soll, je nachdem $\varkappa_p$ positiv oder negativ ist.

Nehmen wir nun in der Vollständigkeits-Relation (51)

$$u(s) = V(s)\pi_p(s), \quad v(s) = V(s)\pi_q(s),$$

so lehrt dieselbe

$$\int_a^b V(s)\pi_p(s)\pi_q(s)ds = (\pm 1)_p(\pm 1)_q \frac{1}{|\varkappa_p\varkappa_q|^{\frac{1}{2}}}\{v_1\lambda'_{p1}\lambda'_{q1} + v_2\lambda'_{p2}\lambda'_{q2} + \cdots\}$$

$$= (\pm 1)_q(\pm 1)_q \frac{1}{|\varkappa_p\varkappa_q|^{\frac{1}{2}}} A'_p(.)\, V(.,.)\, A'_q(.)$$

und folglich wegen (55) und (56)

(61) $$\begin{aligned} \int_a^b V(s)\pi_p(s)\pi_q(s)ds &= 0 \qquad (p \neq q), \\ \int_a^b V(s)(\pi_p(s))^2 ds &= (\pm 1)_p; \end{aligned}$$

wegen des Bestehens dieser Gleichungen sagen wir, daß die Funktionen $\pi_1(s), \pi_2(s), \ldots$ *ein polares Funktionensystem bilden.*

Nehmen wir ferner in der Vollständigkeits-Relation (51) t als Integrationsvariable und setzen

$$u(t) = K(s, t), \quad v(t) = V(t)\pi_p(t),$$

so folgt mit Rücksicht auf (58), (60)

$$(62) \qquad \int_a^b K(s, t)\pi_p(t)\,dt = (\pm 1)_p \frac{1}{|\varkappa_p|^{\frac{1}{2}}} (v_1 k_1(s)\lambda'_{p1} + v_2 k_2(s)\lambda'_{p2} + \cdots)$$

$$= \varkappa_p V(s)\pi_p(s),$$

oder wenn wir

$$\lambda_p = \frac{1}{\varkappa_p}$$

einführen,

$$(63) \qquad V(s)\pi_p(s) = \lambda_p \int_a^b K(s, t)\pi_p(t)\,dt;$$

d. h. *die zu unserer ursprünglichen vorgelegten polaren Integralgleichung* (49) *gehörige homogene polare Integralgleichung*

$$(64) \qquad V(s)\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = 0$$

besitzt für $\lambda = \lambda_p$ *die wegen* (61) *gewiß nicht identisch verschwindende Lösung* $\varphi(s) = \pi_p(s)$.

Wir wenden uns nun zu der wichtigsten Frage, nämlich der Frage nach der Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion in eine Reihe, die nach den Funktionen des polaren Systems $\pi_1(s), \pi_2(s), \ldots$ fortschreitet.

Bei dieser Untersuchung legen wir die aus (54) hervorgehende Identität

$$(65) \qquad K(x, y) = A_1(x)A_1(y) + A_2(x)A_2(y) + \cdots$$

zugrunde und wenden auf den hier rechts stehenden Ausdruck die analoge Betrachtung an, wie sie in Kapitel XIV auf den Ausdruck (41) angewandt worden ist. Wir verstehen dann wiederum unter $g(s)$ eine willkürliche in s stetige Funktion und setzen in die Identität (65)

$$(66) \qquad \begin{aligned} x_p &= v_p[V(*)g(*)]_p, \\ y_p &= v_p k_p(s) = v_p[K(s, *)]_p \end{aligned}$$

ein. Da mit Rücksicht auf die Vollständigkeits-Relation (51) mit Hilfe von (52)

$$k_{1_p} v_1 [V(*) g(*)]_1 + k_{2_p} v_2 [V(*) g(*)]_2 + \cdots = \int_a^b k_p(s) g(s) ds$$
$$= \left[\int_a^b K(s, *) g(s) ds \right]_p$$

wird, so bekommt die linke Seite jener Identität (65) nach Einsetzung von (66) den Wert

$$v_1 k_1(s) \left[\int_a^b K(t, *) g(t) dt \right]_1 + v_2 k_2(s) \left[\int_a^b K(t, *) g(t) dt \right]_2 + \cdots$$
$$= \int_a^b \int_a^b K(s, r) V(r) K(r, t) g(t) dr dt.$$

Andererseits wird bei Heranziehung von (59) und der Vollständigkeits-Relation (51)

$$A_p'(v[V(*) g(*)]) = \lambda_{p\,1}' v_1 [V(*) g(*)]_1 + \lambda_{p\,2}' v_2 [V(*) g(*)]_2 + \cdots$$
$$= \frac{1}{\varkappa_p} \int_a^b A_p'(v k(s)) g(s) ds$$
$$= \frac{|\varkappa_p|^{\frac{3}{2}}}{\varkappa_p} \int_a^b V(s) \pi_p(s) g(s) ds.$$

Folglich geht die rechte Seite jener Identität (65) nach der Substitution (66) mit Rücksicht auf die Tatsache, daß $A_p(vk(s))$ verschwindet, sobald $\mathfrak{k}_p$ Null ist, und mit Bemerkung von (60) in

$$V(s) \left\{ \varkappa_1 |\varkappa_1| \int_a^b V(s) \pi_1(s) g(s) ds \cdot \pi_1(s) + \varkappa_2 |\varkappa_2| \int_a^b V(s) \pi_2(s) g(s) ds \cdot \pi_2(s) + \cdots \right\}$$

über. Setzen wir daher

$$(67) \qquad f(s) = \int_a^b \int_a^b V(s) K(s, t) V(t) K(t, r) g(r) dt dr$$
$$= \int_a^b VKVK(s, r) g(r) dr,$$

wo zur Abkürzung

$$VKVK(s, r) = \int_a^b V(s) K(s, t) V(t) K(t, r) dt$$

gesetzt ist, und setzen wir ferner, indem wir (62) berücksichtigen,

$$c_p = (\pm 1)_p \int_a^b f(s) V(s) \pi_p(s) ds = \varkappa_p |\varkappa_p| \int_a^b V(s) g(s) \pi_p(s) ds,$$

so führt die Vergleichung beider Seiten der Identität (65) nach Multiplikation mit $V(s)$ zu der Formel

$$f(s) = c_1 \pi_1(s) + c_2 \pi_2(s) + \cdots,$$

wo die Reihe rechter Hand nach den obigen Ausführungen gleichmäßig und absolut konvergiert; d. h. wir erhalten den Satz:

Satz 41. *Jede durch Vermittlung einer stetigen Funktion $g(s)$ in der Gestalt* (67) *darstellbare Funktion $f(s)$ läßt sich auf Fouriersche Weise in eine nach den Funktionen $\pi_1(s)$, $\pi_2(s)$, ... fortschreitende gleichmäßig und absolut konvergente Reihe*

$$f(s) = c_1 \pi_1(s) + c_2 \pi_2(s) + \cdots,$$

$$c_p = (\pm 1)_p \int_a^b f(s) V(s) \pi_p(s) ds$$

entwickeln.

Die Werte λ_1, λ_2, ... wachsen, wenn in unendlicher Zahl vorhanden, absolut genommen über alle Grenzen; sie und die zugehörigen polaren Funktionen $\pi_1(s)$, $\pi_2(s)$, ... sind wesentlich durch $K(s, t)$ und $V(s)$ bestimmt; wir nennen sie die *Eigenwerte* bzw. *Eigenfunktionen der polaren Integralgleichung* (49). Den Eigenwerten und Eigenfunktionen einer polaren Integralgleichung kommen die entsprechenden Eigenschaften zu, wie wir sie oben in Kapitel XIV im Falle der orthogonalen Integralgleichung gefunden haben. Insbesondere erkennen wir durch ganz analoge Betrachtungen folgenden Satz:

Satz 42. *Die zur polaren Integralgleichung* (49) *gehörige homogene polare Integralgleichung* (64) *besitzt nur für diese Eigenwerte $\lambda = \lambda_p$ eine nicht verschwindende Lösung, und die zu λ_p gehörigen polaren Eigenfunktionen bzw. deren lineare Kombinationen sind auch die einzigen Lösungen der homogenen Integralgleichung* (64).

Besitzt eine polare Integralgleichung nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so folgt aus dem Entwicklungssatze wegen

$$(\pm 1)_p \int_a^b f(s) V(s) \pi_p(s) ds = \frac{1}{\lambda_p \,|\, \lambda_p \,|} \int_a^b V(s) \pi_p(s) g(s) ds \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

sofort

$$f(s) = \int_a^b VKVK(s, r) g(r) dr$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 \,|\, \lambda_1 \,|} \int_a^b V(r) \pi_1(r) g(r) dr \cdot \pi_1(s) + \cdots + \frac{1}{\lambda_n \,|\, \lambda_n \,|} \int_a^b V(r) \pi_n(r) g(r) dr \cdot \pi_n(s),$$

und da diese Gleichung für jede stetige Funktion $g(r)$ statthaben muß, so ergibt sich

$$VKVK(s, t) = V(t)\left\{\frac{1}{\lambda_1|\lambda_1|}\pi_1(s)\pi_1(t) + \cdots + \frac{1}{\lambda_n|\lambda_n|}\pi_n(s)\pi_n(t)\right\}$$

oder nach Multiplikation mit $V(s)$

$$\int_a^b K(s,r)V(r)K(r,t)dr = V(s)V(t)\left\{\frac{1}{\lambda_1|\lambda_1|}\pi_1(s)\pi_1(t) + \cdots + \frac{1}{\lambda_n|\lambda_n|}\pi_n(s)\pi_n(t)\right\},$$

d. h. *$K(s, t)$ ist eine derartige Funktion von s, t, daß, wenn man die Funktion*

$$KVK(s, t) = \int_a^b K(s, r)V(r)K(r, t)dr$$

bildet und darin eine der beiden Variabeln, etwa t, als Parameter auffaßt, diese Funktion $KVK(s, t)$ für beliebige t nur n linear unabhängige Funktionen der anderen Variabeln darzustellen vermag; insbesondere ist gewiß ein Eigenwert der polaren Integralgleichung immer vorhanden, wenn nicht $KVK(s, t)$ identisch in s, t verschwindet.

Die letzte Aussage gestattet die Umkehrung. In der Tat, verschwindet $KVK(s, t)$ identisch in s, t und besäße dann die homogene polare Integralgleichung (64) für irgendeinen Wert von λ eine Lösung $\varphi(s)$, so würde durch Multiplikation derselben mit $K(r, s)V(s)$ und Integration nach s

$$\int_a^b K(r, s)\varphi(s)ds - \lambda\int_a^b KVK(r, t)\varphi(t)dt = 0,$$

mithin

$$\int_a^b K(r, s)\varphi(s)ds = 0$$

und wegen (64)

$$\varphi(s) = 0$$

folgen, d. h. *die polare Integralgleichung besitzt gewiß keinen Eigenwert, wenn $KVK(s, t)$ identisch verschwindet.*

Nehmen wir beispielsweise das Intervall $a = 0$ bis $b = 1$,

$$V(s) = +1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq s < \tfrac{1}{2},$$
$$V(s) = -1 \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} \leqq s \leqq 1$$

und

$$K(s, t) = K(s + \tfrac{1}{2}, t) = K(s, t + \tfrac{1}{2}),$$

so gewinnen wir eine polare Integralgleichung mit nicht verschwindendem Kern $K(s, t)$, die keinen Eigenwert besitzt, da, wie leicht erkannt wird, die Funktion $KVK(s, t)$ identisch verschwindet.

Wird von dem Kern $K(s, t)$ der vorgelegten polaren Integralgleichung vorausgesetzt, daß er ein allgemeiner ist, so läßt sich leicht zeigen, daß, wenn $f(s)$ eine beliebige stetige Funktion und ε irgendeine noch so kleine positive Größe bedeutet, stets mittelst geeigneter Koeffizienten eine solche

lineare Kombination $f^*(s)$ aus einer endlichen Anzahl der Eigenfunktionen $\pi_1(s)$, $\pi_2(s)$, ... gebildet werden kann, daß

$$\int_a^b (f(s) - f^*(s))^2 ds < \varepsilon$$

ausfällt. Ferner ist dann die quadratische Form $K(x)$ abgeschlossen (S 194), und wir können daher in der obigen Entwicklung an Stelle des Satzes 38* in Kapitel XII den Satz 38 ebenda (S. 156) anwenden; wir finden so, daß in diesem Falle die polare Integralgleichung *sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Eigenwerte besitzt.*

Wie man unmittelbar sieht, bleiben die sämtlichen Entwicklungen und Resultate der Kapitel XIII, XIV, XV gewiß dann gültig, wenn der Kern $K(s, t)$ Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}$ ten Ordnung besitzt — in dem Sinne, den wir in Kapitel VI (S. 31) festgesetzt haben; denn dann bleibt $(K(s, t))^2$ integrierbar und daher die aus $K(s, t)$ entstehende bilineare bzw. quadratische Form stetig.

Aber es zeigt sich sogar, daß im wesentlichen die absolute Integrabilität des Kerns — wenn dieser bei $s = t$ unendlich wird — für die Gültigkeit der Theorie genügt. Hier sei nur erwähnt, daß der Beweis hierfür wiederum in der einfachsten Weise mittelst der Methode der unendlich vielen Variabeln durch eine geringe Modifikation des obigen Verfahrens gelingt, während, wie es scheint, alle bisher zur Auflösung der Integralgleichungen benutzten Methoden, insbesondere auch die Methode von Fredholm nicht anwendbar sind, da für einen solchen Kern die im Nenner der „Fredholmschen Resolvente" auftretende Potenzreihe nicht konvergieren muß und auch für keinen der durch Iteration entstehenden Kerne die Konvergenz der entsprechenden Potenzreihe stattzufinden braucht. Um mittelst der Methode der unendlich vielen Variabeln die Lösung der Integralgleichung in diesem Falle zu erzielen, bedienen wir uns des Satzes, daß die aus einem Kern $K(s, t)$ entspringende Bilinearform mit unendlich vielen Variabeln gewiß vollstetig ausfällt, sobald die Singularität des Kerns von der Art wie $f(s - t)$ ist, wo $f(x)$ eine bei $x = 0$ absolut integrable, sonst stetige Funktion bedeutet. Man hat alsdann zum Beweise nur nötig, diejenige Integral gleichung heranzuziehen, der die Funktion

$$\psi(s) = \int_a^s \varphi(s) ds$$

genügt.

Sechszehntes Kapitel.

Anwendung der Theorie der polaren Integralgleichungen auf Differentialgleichungen und auf Systeme von simultanen Differentialgleichungen.

Die im vorigen Kapitel XV gefundene Entwicklung willkürlicher Funktionen, die nach polaren Funktionen fortschreiten, bildet eine wesentliche Ergänzung der bekannten Entwicklungen nach orthogonalen Funktionen; insbesondere kommen in der Theorie der Differentialgleichungen polare Funktionensysteme neben den orthogonalen Systemen zur Anwendung und erweisen sich dann als ein ebenso notwendiges Hilfsmittel, wie die in der Literatur bisher allein behandelten orthogonalen Funktionensysteme.

So ist bisher in der bekannten Sturm-Liouvilleschen Theorie der Differentialgleichung[1])

$$(68) \qquad \frac{d\left(p\,\dfrac{du}{dx}\right)}{dx} + (q + \lambda k)u = 0$$

stets die Voraussetzung gemacht worden, daß k eine im betrachteten Intervalle a bis b positive Funktion sei.[2]) Lassen wir diese Voraussetzung fallen und nehmen vielmehr an, daß k eine stetige Funktion sei, die im Intervalle a bis b eine endliche Anzahl von Malen ihr Vorzeichen wechselt, so führt, wenn $q \leqq 0$ ausfällt, die in Kapitel VII—VIII dargelegte Methode nicht wie dort auf eine orthogonale, sondern auf eine polare Integralgleichung mit definitem Kern, und da dieser Kern überdies allgemein ist, so zeigt die im vorigen Kapitel XV begründete Theorie, daß die Differentialgleichung (68) nunmehr sowohl für unendlich viele positive, wie für unendlich viele negative Werte des Parameters λ — die sogenannten Eigenwerte — Lösungen besitzt, die den betreffenden homogenen Randbedingungen genügen und die Eigenfunktionen der Differentialgleichung heißen mögen. Diese Eigenfunktionen bilden, von dem Faktor $\sqrt{|k|}$ abgesehen, ein polares Funktionensystem, und es folgt der Satz, daß jede viermal stetig differenzierbare Funktion, die in den Randpunkten a, b und den Nullpunkten von k gewisse Bedingungen erfüllt, sich in eine nach jenen Eigenfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln läßt. Wir erkennen somit, daß alle wesentlichen Aussagen der Sturm-

1) Vgl. Kapitel VII.

2) Vgl. indes Bôcher, Bulletin of the Amer. Math. Soc., Vol. IV (1898), pag. 367, wo das die Gleichung $y'' = \varphi(x, \lambda)y$ betreffende Oszillationstheorem bewiesen wird.

Liouvilleschen Theorie unabhängig von der Voraussetzung des definiten Charakters der Funktion k gültig bleiben, wenn nur die Funktion p den definiten Charakter besitzt und $q \leqq 0$ ist.

Die in Kapitel VIII gegebene Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial p \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial p \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} + (q + \lambda k)u = 0$$

gestattet nunmehr die entsprechende Erweiterung auf den Fall, daß die stetige Funktion k in einer endlichen Anzahl von regulär begrenzten Teilgebieten innerhalb des Gebietes J verschiedene Vorzeichen besitzt. Wir erkennen wiederum genau auf dem eben angedeuteten Wege, daß diese partielle Differentialgleichung sowohl für unendlich viele positive, wie für unendlich viele negative Werte des Parameters λ der betreffenden homogenen Randbedingung genügende Lösungen besitzt[1]), nach denen sich gewiß eine jede viermal stetig differenzierbare Funktion entwickeln läßt, wenn sie auf dem Rande sowie in den Grenzkurven jener Teilgebiete gewisse leicht anzugebende Bedingungen erfüllt.

Die in Kapitel VII—VIII entwickelte Theorie der linearen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung läßt sich auch auf Systeme von simultanen linearen Differentialgleichungen ausdehnen. Dies soll an dem Beispiel des Systems zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einer unabhängigen Variabeln gezeigt werden.

Es seien $u_1(x)$, $u_2(x)$ die zu bestimmenden Funktionen der unabhängigen Variabeln x und

$$\begin{aligned} Q(u_1', u_2', u_1, u_2) = {} & p_{11}(x)u_1'^2 + 2p_{12}(x)u_1'u_2' + p_{22}u_2'^2 \\ & + 2q_{11}(x)u_1'u_1 + 2q_{12}u_1'u_2 + 2q_{21}u_2'u_1 + 2q_{22}u_2'u_2 \\ & + r_{11}u_1^2 + 2r_{12}u_1u_2 + r_{22}u_2^2 \end{aligned}$$

ein homogener quadratischer Ausdruck in u_1, u_2 und den ersten Ableitungen

$$u_1' = \frac{du_1(x)}{dx}, \quad u_2' = \frac{du_2(x)}{dx},$$

dessen Koeffizienten $p_{11}, p_{12}, p_{22}, q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}, r_{11}, r_{12}, r_{22}$ gegebene stetige Funktionen von x sind und worin überdies $p_{11}p_{22} - p_{12}^2$ für keinen Wert des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ verschwinden soll.

---

1) Die Existenz dieser Funktionen für die partielle Differentialgleichung $\Delta u + \lambda k u = 0$ hat bereits M. Mason nach einer von mir herrührenden Methode gezeigt; Journ. de Math. 1904.

Durch Nullsetzen der ersten Variation des Integrals

$$D(u_1, u_2) = \int_a^b Q(u_1', u_2', u_1, u_2)\,dx$$

entsteht das System der zwei linearen Differentialgleichungen

(69) $$L_1(u_1, u_2) = 0, \quad L_2(u_1, u_2) = 0,$$

wenn zur Abkürzung

(70) $$L_1(u) = L_1(u_1, u_2) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\,\dfrac{\partial Q}{\partial u_1'}}{dx} - \frac{\partial Q}{\partial u_1}\right),$$
$$L_2(u) = L_2(u_1, u_2) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\,\dfrac{\partial Q}{\partial u_2'}}{dx} - \frac{\partial Q}{\partial u_2}\right)$$

gesetzt wird.

Bedeuten v_1, v_2 wiederum zwei Funktionen von x, so finden wir durch Anwendung der Produktintegration das Analogon der Greenschen Formel, wie folgt

(71) $$\int_a^b \{v_1 L_1(u) - u_1 L_1(v) + v_2 L_2(u) - u_2 L_2(v)\}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[v_1 \frac{\partial Q}{\partial u_1'} - u_1 \frac{\partial Q}{\partial v_1'} + v_2 \frac{\partial Q}{\partial u_2'} - u_2 \frac{\partial Q}{\partial v_2'}\right]_a^b.$$

Wir wollen nun die Lösungen $u_1(s)$, $u_2(s)$ der Differentialgleichungen (69) bei homogenen Randbedingungen nach Analogie der in Kapitel VII (S. 41—42) aufgestellten Bedingungen I—V unterwerfen. Der Kürze halber ziehen wir jedoch hier nur die Forderung des Verschwindens beider Funktionen an den Randpunkten a, b, also die Randbedingungen

(72) $$u_1(a) = 0, \quad u_1(b) = 0,$$
$$u_2(a) = 0, \quad u_2(b) = 0$$

in Betracht. Wir nehmen nunmehr an, es gäbe zwei den Parameter ξ enthaltende Systeme von Lösungen der Differentialgleichungen (69)

(73) $$u_1 = G_{11}(x, \xi), \quad u_2 = G_{21}(x, \xi), \qquad \Big| \qquad u_1 = G_{12}(x, \xi), \quad u_2 = G_{22}(x, \xi)$$

von folgender Beschaffenheit:

1. Die vier Funktionen G_{11}, G_{21}, G_{12}, G_{22} sind sämtlich zweimal stetig differenzierbare Funktionen für alle x mit Ausnahme der Stelle $x = \xi$ innerhalb des Intervalles a bis b; für $x = \xi$ sind jene vier Funktionen vielmehr von der Gestalt

$$G_{11}(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\pi_{11}(\xi)\,|x - \xi| + S_{11}(x), \quad G_{12}(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\pi_{12}(\xi)\,|x - \xi| + S_{12}(x),$$
$$G_{21}(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\pi_{21}(\xi)\,|x - \xi| + S_{21}(x), \quad G_{22}(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\pi_{22}(\xi)\,|x - \xi| + S_{22}(x),$$

wo π_{11}, π_{12}, π_{21}, π_{22} die aus den Gleichungen

$$\pi_{11}p_{11} + \pi_{21}p_{12} = 1, \quad \pi_{12}p_{11} + \pi_{22}p_{12} = 0,$$
$$\pi_{11}p_{12} + \pi_{21}p_{22} = 0, \quad \pi_{12}p_{12} + \pi_{22}p_{22} = 1$$

zu bestimmenden Funktionen des Parameters ξ, und S_{11}, S_{21}, S_{12}, S_{22} stetig differenzierbare Funktionen von x sind.

2. Die beiden Funktionenpaare G_{11}, G_{21} und G_{12}, G_{22} genügen identisch in ξ den Randbedingungen (72).

Das System der vier Funktionen (73) heiße dann *das Greensche System für die Differentialausdrücke* L_1, L_2 *bei den Randbedingungen* (72).

Setzen wir in der Greenschen Formel (71)

$$u_1 = G_{11}(x, \xi), \quad v_1 = G_{11}(x, \xi^*),$$
$$u_2 = G_{21}(x, \xi), \quad v_2 = G_{21}(x, \xi^*),$$

ferner

$$u_1 = G_{11}(x, \xi), \quad v_1 = G_{12}(x, \xi^*),$$
$$u_2 = G_{21}(x, \xi), \quad v_2 = G_{22}(x, \xi^*)$$

und endlich

$$u_1 = G_{12}(x, \xi), \quad v_1 = G_{12}(x, \xi^*),$$
$$u_2 = G_{22}(x, \xi), \quad v_2 = G_{22}(x, \xi^*),$$

so finden wir leicht das *Symmetriegesetz des Greenschen Systems der Differentialausdrücke* L_1, L_2,

$$G_{11}(x, \xi) = G_{11}(\xi, x),$$
$$G_{12}(x, \xi) = G_{21}(\xi, x),$$
$$G_{22}(x, \xi) = G_{22}(\xi, x).$$

Bezeichnen nun $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ gegebene stetige Funktionen der Variabeln x und verstehen wir unter $f_1(x)$, $f_2(x)$ Lösungen der inhomogenen Differentialgleichungen

$$(74) \qquad \begin{aligned} L_1(f_1, f_2) &= -\varphi_1(x), \\ L_2(f_1, f_2) &= -\varphi_2(x), \end{aligned}$$

die durchweg innerhalb des Intervalles stetig differenzierbar sind und den Randbedingungen (72) genügen, so finden wir mit Hilfe der Greenschen Formel (71) ebenfalls leicht

$$(75) \qquad \begin{aligned} f_1(x) &= \int_a^b \{ G_{11}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + G_{12}(x, \xi)\varphi_2(\xi) \} d\xi, \\ f_2(x) &= \int_a^b \{ G_{21}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + G_{22}(x, \xi)\varphi_2(\xi) \} d\xi. \end{aligned}$$

Umgekehrt, die so dargestellten Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ sind Lösungen von (74) und genügen zugleich den Randbedingungen (72).

Wir definieren jetzt folgende Funktion von x bzw. x, ξ in dem Intervalle a bis $2b-a$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x) && \text{für } a \leqq x < b \\
&= f_2(x-b+a) && \text{„ } b \leqq x \leqq 2b-a, \\
\varphi(x) &= \varphi_1(x) && \text{„ } a \leqq x < b, \\
&= \varphi_2(x-b+a) && \text{„ } b \leqq x \leqq 2b-a, \\
G(x,\xi) &= G_{11}(x,\xi) && \text{„ } a \leqq x < b, \quad a \leqq \xi < b, \\
&= G_{12}(x, \xi-b+a) && \text{„ } a \leqq x < b, \quad b \leqq \xi \leqq 2b-a, \\
&= G_{21}(x-b+a, \xi) && \text{„ } b \leqq x \leqq 2b-a, \quad a \leqq \xi < b, \\
&= G_{22}(x-b+a, \xi-b+a) && \text{„ } b \leqq x \leqq 2b-a, \quad b \leqq \xi \leqq 2b-a.
\end{aligned}$$

Alsdann stellen sich die Integralgleichungen (75) in der Gestalt der einen Integralgleichung dar (vgl. Kap. XIV, S. 194):

$$(76) \qquad f(x) = \int_a^{2b-a} G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

Die Funktion $G(x, \xi)$ ist nach dem vorhin aufgestellten Symmetriegesetz symmetrisch in bezug auf die beiden Variabeln x, ξ; sie stellt überdies einen Kern dar, der, wie wir aus (74) schließen, abgeschlossen und allgemein ist.

Wir betrachten nun die durch Einfügung eines Parameters λ erweiterten simultanen Differentialausdrücke

$$(77) \qquad \begin{aligned}
A_1(u_1, u_2) &= L_1(u_1, u_2) + \lambda(k_{11}(x)u_1 + k_{12}(x)u_2), \\
A_2(u_1, u_2) &= L_2(u_1, u_2) + \lambda(k_{21}(x)u_1 + k_{22}(x)u_2),
\end{aligned}$$

wo $k_{11}, k_{12} = k_{21}, k_{22}$ gegebene stetige Funktionen von x sein mögen, deren Determinante $k_{11}k_{22} - k_{12}^2$ nur in einer endlichen Zahl von Teilintervallen verschiedene Vorzeichen besitzt.

Wir lösen nun die Gleichungen

$$(78) \qquad \begin{aligned}
v_1 &= k_{11}u_1 + k_{12}u_2, \\
v_2 &= k_{21}u_1 + k_{22}u_2
\end{aligned}$$

nach u_1, u_2 auf, wie folgt

$$(79) \qquad \begin{aligned}
u_1 &= \varkappa_{11}v_1 + \varkappa_{12}v_2, \\
u_2 &= \varkappa_{21}v_1 + \varkappa_{22}v_2, \quad (\varkappa_{12} = \varkappa_{21}),
\end{aligned}$$

und bestimmen dann $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ als irgendwelche Funktionen von x derart, daß, wenn

$$(80) \qquad \begin{aligned}
v_1 &= \alpha_{11}\varphi_1 + \alpha_{12}\varphi_2, \\
v_2 &= \alpha_{21}\varphi_1 + \alpha_{22}\varphi_2
\end{aligned}$$

gesetzt wird, in φ_1, φ_2 die Identität

$$(81) \qquad \varkappa_{11}v_1^2 + 2\varkappa_{12}v_1v_2 + \varkappa_{22}v_2^2 = V_1(x)\varphi_1^2 + V_2(x)\varphi_2^2$$

besteht, wo $V_1(x)$, $V_2(x)$ Funktionen von x sein sollen, die nur die Werte $+1$ oder -1 annehmen. Die Substitution (80) möge ferner die Identität

$$(82)\quad \begin{aligned} &G_{11}v_1(x)v_1(\xi)+G_{12}v_1(x)v_2(\xi)+G_{21}v_2(x)v_1(\xi)+G_{22}v_2(x)v_2(\xi)\\ &=H_{11}\varphi_1(x)\varphi_1(\xi)+H_{12}\varphi_1(x)\varphi_2(\xi)+H_{21}\varphi_2(x)\varphi_1(\xi)+H_{22}\varphi_2(x)\varphi_2(\xi)\end{aligned}$$

liefern, wo H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22} Funktionen von x, ξ werden; endlich bezeichne $H(x, \xi)$ diejenige symmetrische Funktion von x, ξ im Intervalle a bis $2b-a$, die aus H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22} ebenso gebildet ist, wie vorhin $G(x, \xi)$ aus G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}.

Damit haben wir die Mittel zur Erledigung der Frage gewonnen, ob die homogenen Differentialgleichungen

$$(83)\quad \Delta_1(u_1, u_2)=0,\quad \Delta_2(u_1, u_2)=0$$

außer Null Lösungen besitzen, die zugleich den Randbedingungen genügen. In der Tat, aus

$$L_1(u_1, u_2)=-\lambda(k_{11}u_1+k_{12}u_2),$$
$$L_2(u_1, u_2)=-\lambda(k_{21}u_1+k_{22}u_2)$$

folgt nach (74), (75)

$$u_1(x)=\lambda\int_a^b\{G_{11}(x,\xi)(k_{11}(\xi)u_1(\xi)+k_{12}(\xi)u_2(\xi))+G_{12}(x,\xi)(k_{21}(\xi)u_1(\xi)+k_{22}(\xi)u_2(\xi))\}\,d\xi,$$

$$u_2(x)=\lambda\int_a^b\{G_{21}(x,\xi)(k_{11}(\xi)u_1(\xi)+k_{12}(\xi)u_2(\xi))+G_{22}(x,\xi)(k_{21}(\xi)u_1(\xi)+k_{22}(\xi)u_2(\xi))\}\,d\xi,$$

oder nach Ausführung der Substitution (78), (79)

$$\varkappa_{11}(x)v_1(x)+\varkappa_{12}(x)v_2(x)=\lambda\int_a^b\{G_{11}(x,\xi)v_1(\xi)+G_{12}(x,\xi)v_2(\xi)\}\,d\xi,$$

$$\varkappa_{21}(x)v_1(x)+\varkappa_{22}(x)v_2(x)=\lambda\int_a^b\{G_{21}(x,\xi)v_1(\xi)+G_{22}(x,\xi)v_2(\xi)\}\,d\xi.$$

Wenden wir endlich auf die Funktionen v_1, v_2 die Substitution (80) an und kombinieren diese Gleichungen entsprechend, so erhalten dieselben unter Zuziehung von (81), (82) die Gestalt

$$V_1(x)\varphi_1(x)=\lambda\int_a^b\{H_{11}(x,\xi)\varphi_1(\xi)+H_{12}(x,\xi)\varphi_2(\xi)\}\,d\xi,$$

$$V_2(x)\varphi_2(x)=\lambda\int_a^b\{H_{21}(x,\xi)\varphi_1(\xi)+H_{22}(x,\xi)\varphi_2(\xi)\}\,d\xi,$$

oder

$$(84)\quad V(x)\varphi(x)-\lambda\int_a^{2b-a}H(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi=0,$$

wo φ, H die festgesetzte Bedeutung haben und $V(x)$ durch die Gleichungen

$$V(x) = V_1(x), \qquad a \leqq x \leqq b,$$
$$= V_2(x - b + a), \quad b \leqq x \leqq 2b - a$$

definiert ist.

Aus (84) haben wir zunächst φ zu bestimmen und daraus die Funktionenpaare φ_1, φ_2, alsdann nach (80) v_1, v_2 und schließlich aus (79) die gesuchten Integrale u_1, u_2 von (83) zu entnehmen. Hinsichtlich des Charakters der Integralgleichung (84) sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $V(x)$ für alle x dasselbe Vorzeichen darstellt oder nicht.

Der erste Fall tritt ein, wenn die quadratische Form

$$k_{11} u_1^2 + 2 k_{12} u_1 u_2 + k_{22} u_2^2$$

für alle Argumente x positiv oder negativ definit ausfällt, d. h. wenn für alle x

(85) $$k_{11}(x) k_{22}(x) - k_{12}^2(x) > 0$$

ist. Die Integralgleichung (84) ist dann eine orthogonale, und es gibt unserer Theorie zufolge *unendlich viele Werte von λ — die Eigenwerte $\lambda^{(p)}$ —*, für die Lösungen der verlangten Art vorhanden sind — die zugehörigen *Eigenfunktionenpaare $u_1^{(p)}$, $u_2^{(p)}$ jenes Differentialgleichungssytems* (83). Jedes Paar zweimal stetig differenzierbarer, in den Randpunkten verschwindender Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ läßt sich in Reihen nach jenen Eigenfunktionenpaaren simultan mit gleichen Fourier-Koeffizienten entwickeln wie folgt

$$f_1(x) = c_1 u_1^{(1)}(x) + c_2 u_1^{(2)}(x) + \cdots,$$
$$f_2(x) = c_1 u_2^{(1)}(x) + c_2 u_2^{(2)}(x) + \cdots.$$

Ist die Bedingung (85) nicht erfüllt, so wird $V(x)$ gewiß beide Werte $+ 1$ und $- 1$ annehmen. Die Integralgleichung (84) ist dann eine polare Integralgleichung mit definitem Kern, sobald die quadratische Form $Q(u_1', u_2', u_1, u_2)$ für alle Variabelnwerte x hinsichtlich der vier Argumente u_1', u_2', u_1, u_2 positiv definiten oder negativ definiten Charakter hat. Ist diese Bedingung erfüllt, so findet die in Kapitel XV entwickelte Theorie der polaren Integralgleichung Anwendung, und wir erkennen, daß es wiederum unendlich viele und zwar sowohl *unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Werte von λ — die Eigenwerte* — gibt, für die Lösungen von der verlangten Art vorhanden sind — die zugehörigen *Eigenfunktionenpaare jenes Differentialgleichungssystems* (83). Jedes Paar viermal stetig differenzierbarer Funktionen, die in Randpunkten und in den Nullstellen von $k_{11} k_{22} - k_{12}^2$ gewissen Bedingungen genügen, läßt sich in Reihen nach jenen Eigenfunktionenpaaren simultan mit gleichen Fourier-Koeffizienten entwickeln.

Daß es für die simultanen Differentialgleichungen (69) stets ein Greensches Funktionensystem ev. im erweiterten Sinne (vgl. Kapitel VII

S. 44) gibt, wird in derselben Weise gezeigt, wie im Falle einer einzigen Differentialgleichung.

Eine genau entsprechende Behandlung gestatten die Systeme simultaner partieller Differentialgleichungen.

Was die Konstruktion Greenscher Funktionen für simultane partielle Differentialausdrücke betrifft, so können wir uns desselben Verfahrens bedienen, das ich im zweiten Abschnitt für einen einzelnen linearen partiellen Differentialausdruck entwickelt habe.[1]) Dieses Verfahren erfordert aber nicht nur, daß der vorgelegte Differentialausdruck die Normalform besitzt, sondern es setzt auch die Kenntnis der Greenschen Funktion für den Ausdruck Δ voraus — zwei Umstände, die die Verallgemeinerungsfähigkeit des Verfahrens erheblich beeinträchtigen. Es ist daher die Bemerkung von Wichtigkeit, daß bei jenem Verfahren die Eigenschaft der Greenschen Funktion, der Gleichung $\Delta = 0$ zu genügen, gar nicht wesentlich benutzt wird und daher in demselben die Greensche Funktion sich durch irgendeine Funktion der Variabelnpaare xy, $\xi\eta$ ersetzen läßt, die nur die übrigen für das Verfahren wesentlichen Eigenschaften der Greenschen Funktion besitzt. Auf diese Weise entsteht ein neues Verfahren,[2]) welches, wie mir scheint, eine sehr weite Anwendungsfähigkeit besitzt, indem es auch zum Ziele führt, wenn die Glieder zweiter Ordnung in den partiellen Differentialgleichungen nicht in der üblichen Normalform vorgelegt sind, ja sogar auch auf Differentialgleichungen erster Ordnung, sowie auf partielle Differentialgleichungen von parabolischem und hyperbolischem Typus mit vollem Erfolge anwendbar ist. — Im folgenden Abschnitt wird diese Methode an dem Beispiel der partiellen Differentialgleichung auf der Kugel ausführlich dargelegt werden (Kap. XVIII).

---

1) Betreffs der hier angedeuteten Methode der „Parametrix" vgl. den Bericht über einen von mir in der mathematischen Gesellschaft zu Göttingen gehaltenen Vortrag, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 16 (1907), S. 77—78.

2) Dieses von mir in Kapitel IX (zuerst Gött. Nachr. 1904, S. 247—250) dargelegte Verfahren ist dasselbe, dessen sich neuerdings auch É. Picard (Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XXII, 1906, S. 250—254) zur Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung, die auch erste Ableitungen enthält, bedient hat.

Sechster Abschnitt.

Anwendung der Theorie auf verschiedene Probleme der Analysis und Geometrie.

In den folgenden Kapiteln XVII—XXI behandeln wir zunächst die Randwertaufgabe für ein simultanes System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung von elliptischem Typus, sodann wird die Methode der „Parametrix" zur Zurückführung von Differentialgleichungen auf Integralgleichungen auseinander gesetzt und zur Integration der allgemeinsten elliptischen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf der Kugel verwandt, wobei die Theorie der Eigenwerte und der Eigenfunktionen auf der Kugel sowie das zugehörige Variationsproblem vollständig erledigt wird. Die dann folgenden letzten drei Abschnitte beschäftigen sich mit besonderen, ganz verschiedenartigen Problemen aus der Geometrie und Analysis, nämlich mit Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche, mit einem Problem aus der Theorie der automorphen Funktionen und endlich mit einer gewissen zweiparametrigen Randwertaufgabe, die mit Kleins Oszillationstheorem in engster Beziehung steht: ich wollte durch die Auswahl dieser Beispiele die mannigfache Verwendbarkeit meiner Theorie der orthogonalen und polaren Integralgleichungen offenbar machen.

Siebzehntes Kapitel.

Die Randwertaufgabe für ein System simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung von elliptischem Typus.

In Kapitel VIII habe ich eine Methode angegeben, wie die Randwertaufgaben für eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von elliptischem Typus mittels der Theorie der Integralgleichungen gelöst werden können. Diese Methode ist auch anwendbar, wenn ein System von simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vorliegt: nur bedarf es dann einer entsprechenden Greenschen Formel, und an Stelle der früheren Greenschen Funktion mit logarithmischer Unendlichkeitsstelle $x = \xi$, $y = \eta$ tritt ein System von Greenschen Funktionen, die an jener Stelle gewisse Singularitäten erster Ordnung aufweisen. Wir wollen hier die damit angedeuteten Modifikationen der Methode an dem folgenden speziellen Probleme erläutern.

In der xy-Ebene sei eine geschlossene Kurve C durch die Gleichungen

$$x = a(s), \quad y = b(s)$$

gegeben, wo $a(s)$, $b(s)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s sind; das von C umschlossene Gebiet der xy-Ebene werde mit J bezeichnet. Es seien die zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= pu + qv, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= ku + lv \end{aligned}$$

vorgelegt, wo p, q, k, l gegebene innerhalb J einschließlich C zweimal stetig differenzierbare Funktionen der unabhängigen Variabeln x, y bedeuten; es wird nun nach zwei solchen Funktionen $u(xy)$, $v(xy)$ gefragt, die innerhalb J den partiellen Differentialgleichungen (1) genügen, während $u(xy)$ auf der Randkurve C gegebene viermal stetig differenzierbare Werte

$$u(s) = f(s)$$

annimmt.[1])

Für die linker Hand in (1) stehenden Differentialausdrücke erster Ordnung führen wir zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$L(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$M(u, v) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ein. Alsdann stellen wir die folgende, der bekannten Greenschen Formel entsprechende, für zwei willkürliche Funktionenpaare $u(xy)$, $v(xy)$, $u^*(xy)$, $v^*(xy)$ gültige Identität auf:

$$(2) \quad \int \{u^* L(u, v) - v^* M(u, v) + u L(u^*, v^*) - v M(u^*, v^*)\} dJ$$
$$= \int \left\{ u \left(v^* \frac{dx}{ds} + u^* \frac{dy}{ds} \right) + v \left(u^* \frac{dx}{ds} - v^* \frac{dy}{ds} \right) \right\} ds,$$

wo das Doppelintegral linker Hand über J oder irgendein innerhalb J gelegenes Gebiet und das einfache Integral rechter Hand über die Randkurven dieses Gebietes zu erstrecken ist.

Es mögen nun $G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta)$, $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ für die Differentialgleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

---

1) Die hier dargelegte Methode ist in der Inauguraldissertation von W. A. Hurwitz (Göttingen 1910) auch auf Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung von nicht elliptischem Typus sowie auf kompliziertere Randbedingungen ausgedehnt worden.

die Greenschen Funktionen erster Art bzw. zweiter Art im erweiterten Sinne[1]) sein; dies sind solche Funktionen der Variabelnpaare x, y; ξ, η, deren jede die Form besitzt

$$-\tfrac{1}{2}\log\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}+\gamma(xy,\xi\eta)$$

— unter γ eine für jeden innerhalb J liegenden Punkt ξ, η und für jeden innerhalb J oder auf C liegenden Punkt x, y zweimal stetig differenzierbare Funktion verstanden —, die ferner identisch in ξ, η den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 G^{\mathrm{I}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G^{\mathrm{I}}}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 G^{\mathrm{II}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G^{\mathrm{II}}}{\partial y^2}=\frac{2\pi}{J},$$

sowie den Randbedingungen bzw. der Integralbedingung

$$[G^{\mathrm{I}}(xy,\xi\eta)]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}}=0,$$

$$(3)\qquad \left[\frac{\partial G^{\mathrm{II}}(xy,\xi\eta)}{\partial n}\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}}=0,\qquad \int\limits_{(J)} G^{\mathrm{II}}(xy,\xi\eta)\,dJ=0$$

genügen, wo J den Flächeninhalt des Gebietes J bedeutet und unter n die Richtung der inneren Normalen auf der Kurve C zu verstehen ist.

Wir nehmen jetzt erstens

$$u^*=-\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x},\quad v^*=\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y},$$

sodaß

$$L(u^*,v^*)=0,$$
$$M(u^*,v^*)=0$$

wird, und führen diese Werte in die Formel (2) ein, indem wir zuvor die Unendlichkeitsstelle ξ, η durch einen kleinen Kreis ausschließen. Der Grenzübergang bei Zusammenziehung dieses Kreises auf den Mittelpunkt ξ, η liefert dann die Gleichung

$$(4)\qquad -\int\limits_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}L(u,v)+\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}M(u,v)\right\}dJ=\int\limits_{(C)}u(s)\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n}\,ds-2\pi u(\xi\eta),$$

wo das Doppelintegral linker Hand über das Gebiet J und das einfache Integral rechts über dessen Randkurve C zu erstrecken ist, während n die Richtung der inneren Normale auf C bezeichnet.

Nehmen wir zweitens

$$u^*=\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y},\quad v^*=\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x},$$

wobei

$$L(u^*,v^*)=0,$$
$$M(u^*,v^*)=\frac{2\pi}{J}$$

1) Vgl. Kapitel IX, S. 70—75.

wird, so führt das entsprechende Verfahren zu der Formel

$$(5)\quad \int\limits_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}L(u,v)-\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}M(u,v)-\frac{2\pi}{J}v\right\}dJ=\int\limits_{(C)}u(s)\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial s}ds-2\pi v(\xi\eta).$$

Hilfssatz. Wenn zwei Funktionen $A(xy)$, $B(xy)$ innerhalb J einschließlich des Randes C zweimal stetig differenzierbar und überdies von der Beschaffenheit sind, daß für sie identisch in ξ, η die zwei Integralgleichungen

$$(6)\quad \begin{aligned} &\int\limits_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}A(xy)+\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}B(xy)\right\}dJ=0,\\ &\int\limits_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}A(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}B(xy)\right\}dJ=0 \end{aligned}$$

erfüllt sind, so sind A und B selbst identisch Null.

Zum Beweise dieses Hilfssatzes bestimmen wir durch Berechnung des ebenen Flächenpotentials auf die in der Potentialtheorie übliche Weise eine Funktion $u(xy)$, die innerhalb J einschließlich C der Differentialgleichung

$$\Delta u=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}$$

genügt. Alsdann finden wir durch Integration sofort eine zugehörige Funktion v, so daß

$$(7)\quad \begin{cases} L(u,v)=A,\\ M(u,v)=B \end{cases}$$

wird. Führen wir nun die so gefundenen Funktionen $u(xy)$, $v(xy)$ in (4) und (5) ein, so erhalten wir mit Rücksicht auf (7) und (6) die Gleichungen

$$u(\xi\eta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}u(s)\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n}ds,$$

$$v(\xi\eta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}u(s)\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial s}ds+\frac{1}{J}\int\limits_{(J)}v(xy)dJ.$$

Die erstere Gleichung zeigt, daß $u(xy)$ nichts anderes als dasjenige ebene Potential ist, das in J der Gleichung $\Delta u=0$ genügt und auf C die Werte $u(s)$ aufweist. Bringen wir andererseits die letzte Gleichung auf die Form

$$v(\xi\eta)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}\frac{du(s)}{ds}G^{\mathrm{II}}ds+\frac{1}{J}\int\limits_{(J)}v(xy)dJ,$$

so erkennen wir, daß v dasjenige ebene Potential ist, dessen normale Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial n}$ auf C gleich den Werten $\frac{du(s)}{ds}$ sind, d. h. es ist v genau

ein zu u konjugiertes ebenes Potential, so daß überall innerhalb J die Differentialgleichungen

$$L(u, v) = 0,$$
$$M(u, v) = 0$$

gelten. Wegen (7) folgt hieraus, daß A und B identisch Null sind, und damit ist unser Hilfssatz bewiesen. —

Um nunmehr die anfangs gestellte Randwertaufgabe für die Differentialgleichungen (1) zu lösen, betrachten wir das folgende System von Integralgleichungen

$$(8)\quad -\int\limits_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}(pu+qv)+\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}(ku+lv)\right\}dJ=\int\limits_{(C)} f(s)\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n}ds-2\pi u(\xi\eta),$$

$$(9)\quad \int\limits_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}(pu+qv)-\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}(ku+lv)-\frac{2\pi}{J}v\right\}dJ=\int\limits_{(C)} f(s)\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial s}ds-2\pi v(\xi\eta),$$

das sich auch in die Gestalt

$$(10)\quad \begin{cases} u(\xi\eta)+\int\limits_{(J)}\{K_1(\xi\eta,xy)u(xy)+K_2(\xi\eta,xy)v(xy)\}\,dJ=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} f(s)\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n}ds,\\ v(\xi\eta)+\int\limits_{(J)}\{K_3(\xi\eta,xy)u(xy)+K_4(\xi\eta,xy)v(xy)\}\,dJ=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}\frac{df(s)}{ds}G^{\mathrm{II}}ds,\end{cases}$$

bringen läßt, wo zur Abkürzung

$$2\pi K_1(\xi\eta, xy) = -\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}p(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}k(xy),$$
$$2\pi K_2(\xi\eta, xy) = -\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}q(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}l(xy),$$
$$2\pi K_3(\xi\eta, xy) = \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}p(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}k(xy),$$
$$2\pi K_4(\xi\eta, xy) = \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}q(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}l(xy)-\frac{1}{J}$$

gesetzt ist. Nehmen wir in (10) rechter Hand Null, so entstehen die zu (10) zugehörigen homogenen Integralgleichungen.

Wir machen nun zunächst die Annahme, daß diese homogenen Integralgleichungen keine Lösung besitzen. Nach dem bekannten von Fredholm aufgestellten Satze haben dann die inhomogenen Integralgleichungen (10) gewiß eine Lösung, d. h. es gibt stetige Funktionen $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$, die den Gleichungen (10) genügen. Da wegen der dreimal stetigen Differenzierbarkeit der Funktionen $f(s)$, $\frac{df(s)}{ds}$ auch die rechten Seiten in (10) dreimal stetig differenzierbare Funktionen von ξ, η innerhalb J und auf C sind, so folgt in der üblichen Weise durch dreimalige Iteration der Formeln (10), wonach sich $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$ schließlich als achtfache Integrale darstellen,

daß diese Funktionen $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$ ebenfalls dreimal stetig differenzierbar innerhalb J und auf C sind.

Wegen der Symmetrie der Greenschen Funktion G^{I} in den Variabelnpaaren x, y und ξ, η folgt nach (3), daß sie identisch in x, y verschwindet, sobald der Punkt ξ, η in einen Punkt σ der Randkurve C rückt, und mithin müssen dann auch $K_1(\sigma, xy)$ und $K_2(\sigma, xy)$ identisch in x, y verschwinden; die erstere der beiden Gleichungen (10) liefert mithin für die Funktion u die vorgeschriebenen Randwerte

$$u(\sigma) = f(\sigma). \tag{11}$$

Nunmehr führen wir die eben als Lösung der Integralgleichungen (10) erhaltenen Funktionen u, v sowohl in die Formeln (4), (5) wie in die Formeln (8), (9) ein. Subtrahieren wir dann (8) von (4) und andererseits (9) von (5), so entstehen unter Benutzung von (11) Gleichungen von der Gestalt

$$\int_{(J)} \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x} A(xy) + \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y} B(xy) \right\} dJ = 0,$$

$$\int_{(J)} \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y} A(xy) - \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x} B(xy) \right\} dJ = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$A(xy) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - (pu + qv),$$

$$B(xy) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - (ku + lv),$$

gesetzt ist. Da hier offenbar A, B zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Variabeln x, y innerhalb J und auf C werden, so sind dieselben mit Rücksicht auf den oben bewiesenen Hilfssatz identisch Null, d. h. die Funktionen u, v genügen den anfangs vorgelegten partiellen Differentialgleichungen (1) erster Ordnung.

Nunmehr mögen entgegen der oben gemachten Annahme die zu (10) gehörigen homogenen Integralgleichungen eine Lösung $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$ besitzen, so daß nicht zugleich $u = 0$, $v = 0$ ist. Dann zeigen die eben dargelegten Überlegungen, daß diese Funktionen Lösungen der Differentialgleichungen (1) sind, von denen die erstere, $u(xy)$, die Randwerte Null besitzt. Ferner sind in diesem Falle — wie die Theorie der Integralgleichungen lehrt —, die inhomogenen Integralgleichungen (10) gewiß lösbar, sobald ihre rechten Seiten gewisse lineare Integralbedingungen erfüllen, d. h. bei der gegenwärtigen Annahme gibt es gewiß dann eine Lösung der partiellen Differentialgleichungen (1), wobei u die Randwerte $f(s)$ hat, wenn $f(s)$ gewissen linearen Integralbedingungen genügt. Doch sei bemerkt, daß unter besonderen Umständen diese Integral-

bedingungen identisch von allen Funktionen $f(s)$ erfüllt sein können; so besitzt offenbar das für

$$p = 0, \quad q = 0, \quad k = 0, \quad l = 0$$

aus (1) hervorgehende Gleichungssystem stets Lösungen, wobei u beliebig vorgeschriebene Randwerte $f(s)$ aufweist, obwohl dieses Gleichungssystem die von $u = 0$, $v = 0$ verschiedenen Lösungen $u = 0$, $v = 1$ mit den Randwerten $f(s) = 0$ zuläßt.

Durch Zusammenfassung der erhaltenen Resultate gewinnen wir den Satz:

Satz 43. *Wenn die partiellen Differentialgleichungen* (1) *außer* $u = 0$, $v = 0$ *kein Lösungssystem* u, v *besitzen, derart daß* u *auf der Randkurve* C *verschwindet, so besitzen sie stets notwendig ein Lösungssystem* u, v *derart, daß* u *auf der Randkurve* C *irgend vorgeschriebene Werte* $f(s)$ *annimmt. Im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn es ein Lösungssystem* u, v *der partiellen Differentialgleichungen* (1) *derart gibt, daß* u *auf* C *verschwindet und die Funktionen* u, v *nicht beide überall in* J *Null sind, so existiert ein Lösungssystem* u, v, *wobei* u *auf* C *die vorgeschriebenen Randwerte* $f(s)$ *annimmt, sicher immer dann, wenn* $f(s)$ *gewissen linearen Integralbedingungen in endlicher Anzahl genügt.*

Achtzehntes Kapitel.

Eine neue Methode der Zurückführung von Differentialgleichungen auf Integralgleichungen. Begriff der Parametrix.

Zum Schluß von Kapitel XVI habe ich auf eine neue Methode[1]) hingewiesen, durch welche sich die Lösung linearer Differentialgleichungen mit Hilfe von Integralgleichungen bewerkstelligen läßt. Diese Methode unterscheidet sich von dem in Kapitel VII—VIII entwickelten Verfahren wesentlich dadurch, daß an Stelle der dort benutzten Greenschen Funktion die „Parametrix" tritt, d. h. eine Funktion, die ebenso, wie die Greensche Funktion außer von den Variabeln noch von Parametern abhängt, und auch die Unstetigkeits- und Randbedingungen wie die Greensche Funktion erfüllen muß, aber keineswegs wie diese einer Diffe-

1) Vgl. auch die inzwischen erschienene scharfsinnige Abhandlung von E. E. Levi: I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. Rom 1909.

rentialgleichung zu genügen braucht. Die hierdurch gekennzeichnete Modifikation bringt den Vorteil mit sich, daß man bei der Integration der Differentialgleichung nicht nötig hat, zuvor die Lösbarkeit einer anderen Differentialgleichung vorauszusetzen, und daß es daher auch gelingt, solche partielle Differentialgleichungen auf Integralgleichungen zurückzuführen, die nicht in derjenigen Normalform vorliegen, wie wir sie im zweiten Abschnitt stets angenommen haben.

Ich entwickle in diesem Kapitel die neue Methode an dem Beispiel der allgemeinsten linearen partiellen Differentialgleichung vom elliptischen Typus, während das Integrationsgebiet die Vollkugel ist.

Es seien s, t die unabhängigen Variabeln und z, w irgendwelche Funktionen derselben; als untere Indizes an einer Funktion mögen s, t bedeuten, daß die partiellen Ableitungen der Funktion nach s, t zu nehmen sind. Wir gehen aus von dem allgemeinsten linearen partiellen Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$\mathfrak{L}(z) \equiv a z_{ss} + 2 b z_{st} + c z_{tt} + l z_s + m z_t + n z,$$

wo a, b, c, l, m, n gegebene Funktionen von s, t sind. Der zu $\mathfrak{L}(z)$ adjungierte Differentialausdruck ist

$$\mathfrak{M}(z) \equiv (az)_{ss} + 2(bz)_{st} + (cz)_{tt} - (lz)_s - (mz)_t + nz;$$

ferner mögen

$$\mathfrak{P} \equiv a(wz_s - zw_s) + b(wz_t - zw_t) + (l - a_s - b_t)wz,$$
$$\mathfrak{Q} \equiv b(wz_s - zw_s) + c(wz_t - zw_t) + (m - b_s - c_t)wz$$

die zu $\mathfrak{L}(z)$ gehörigen Bilinearausdrücke heißen: es gilt dann bekanntlich die Identität

(12) $$w\mathfrak{L}(z) - z\mathfrak{M}(w) = \mathfrak{P}_s + \mathfrak{Q}_t.$$

Wenn wir in $\mathfrak{L}(z)$ statt s, t irgendwelche neue Variable s', t' einführen und den Differentialausdruck dann mit der Funktionaldeterminante der ursprünglichen Variabeln nach den neuen d. h. mit

$$t_{s'} s_{t'} - t_{t'} s_{s'}$$

multiplizieren, so heiße der so entstehende Differentialausdruck

$$\mathfrak{L}'(z) = a' z_{s's'} + 2b' z_{s't'} + c' z_{t't'} + l' z_{s'} + m' z_{t'} + n' z$$

der transformierte Ausdruck von $\mathfrak{L}(z)$; desgleichen heiße der aus $\mathfrak{M}(z)$ durch Einführung der neuen Variabeln s', t' und Multiplikation mit jener Funktionaldeterminante entstehende Ausdruck $\mathfrak{M}'(z)$ der transformierte Ausdruck von $\mathfrak{M}(z)$. Endlich mögen die Ausdrücke

(13) $$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} t_{t'} - \mathfrak{Q} s_{t'},$$
$$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{P} t_{s'} + \mathfrak{Q} s_{s'},$$

wenn man rechter Hand in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ die neuen Variabeln s', t' an Stelle von s, t einführt, die transformierten Ausdrücke von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ heißen. Indem wir in der Identität statt s, t die neuen Variabeln s', t' einführen, gelangen wir zu der Identität

$$w\mathfrak{L}'(z) - z\mathfrak{M}'(w) = \mathfrak{P}'_{s'} + \mathfrak{Q}'_{t'}$$

und von dieser führen leichte Überlegungen unter Berücksichtigung der Bauart der Ausdrücke $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ zum Beweise des folgenden Satzes:

Der transformierte Ausdruck $\mathfrak{M}'(z)$ ist genau der zu $\mathfrak{L}'(z)$ adjungierte Ausdruck, und die transformierten Ausdrücke $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ sind genau die zu $\mathfrak{L}'(z)$ gehörigen Bilinearausdrücke.

Im folgenden wollen wir der Kürze halber die Koeffizienten a, b, c, l, m, n des Differentialausdruckes $\mathfrak{L}$, desgleichen alle anderen vorkommenden Funktionen stets als beliebig oft differenzierbar voraussetzen — soweit nicht ausdrücklich Ausnahmen festgesetzt werden.

Es seien nun auf der Kugel mit dem Radius 1 irgend zwei einfach zusammenhängende Gebiete K_1 und K_2 gegeben, die in dem Gebiete K_{12} übereinandergreifen; s_1, t_1 seien irgendwelche krummlinige Koordinaten für das Gebiet K_1 und s_2, t_2 irgendwelche krummlinige Koordinaten für K_2; ferner sei $\mathfrak{L}_1(z)$ ein Differentialausdruck in den Variabeln s_1, t_1 und $\mathfrak{L}_2(z)$ ein Differentialausdruck in den Variabeln s_2, t_2. Bezeichnen wir das Linienelement auf der Kugel in üblicher Weise mit

$$e_1 ds_1^2 + 2f_1 ds_1 dt_1 + g_1 dt_1^2,$$

$$\text{bzw. } e_2 ds_2^2 + 2f_2 ds_2 dt_2 + g_2 dt_2^2,$$

so ist das Flächenelement der Kugel

$$dk = \sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}\, ds_1 dt_1,$$

bzw.

$$= \sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}\, ds_2 dt_2;$$

ferner wird innerhalb des Gebietes K_{12}

$$\frac{\partial s_1}{\partial s_2}\frac{\partial t_1}{\partial t_2} - \frac{\partial s_1}{\partial t_2}\frac{\partial t_1}{\partial s_2} = \frac{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}},$$

und wegen

$$\mathfrak{L}'_1(z) = \mathfrak{L}_1(z)\left(\frac{\partial s_1}{\partial s_2}\frac{\partial t_1}{\partial t_2} - \frac{\partial s_1}{\partial t_2}\frac{\partial t_1}{\partial s_2}\right)$$

folgt mithin

$$\frac{\mathfrak{L}_1(z)}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}} = \frac{\mathfrak{L}'_1(z)}{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}}.$$

Wenn nun der besondere Umstand zutrifft, daß der auf die Variabeln s_2, t_2 transformierte Differentialausdruck $\mathfrak{L}'_1$ mit $\mathfrak{L}_2$ identisch ist, so stellt die Formel

$$L(z) = \frac{\mathfrak{L}_1(z)}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}} \text{ in } K_1$$

$$= \frac{\mathfrak{L}_2(z)}{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}} \text{ in } K_2$$

in dem gemeinsamen Gebiete K_{12} den nämlichen Differentialausdruck dar; zugleich erweist sich der Wert dieses Differentialausdruckes $L(z)$, wenn z eine Funktion einer innerhalb K_1 oder K_2 gelegenen Stelle auf der Kugel bedeutet, als unabhängig von der Wahl der krummlinigen Koordinaten s, t. Ist die Vollkugel mit einer endlichen Anzahl von übereinandergreifenden Gebieten $K_1, K_2, \ldots$ bedeckt und in diesen je ein regulärer Differentialausdruck bzw. $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots$ gegeben von der Art, daß immer in dem gemeinsamen Teile von je zwei übereinandergreifenden Gebieten der transformierte Differentialausdruck des einen Gebietes mit dem Differentialausdrucke des anderen übereinstimmt, so definieren die Formeln

$$L(z) = \frac{\mathfrak{L}_1(z)}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}} \text{ in } K_1,$$
$$= \frac{\mathfrak{L}_2(z)}{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}} \text{ in } K_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

eindeutig und widerspruchslos überall auf der Kugel einen Differentialausdruck, dessen Wert, wenn z eine Funktion der Stelle auf der Kugel bedeutet, ebenfalls unabhängig von der Wahl der krummlinigen Koordinaten s, t ausfällt; der Differentialausdruck $L(z)$ heiße *ein auf der Vollkugel regulärer Differentialausdruck.* Wie man leicht erkennt, bestimmen die zu $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots$ bzw. in $K_1, K_2, \ldots$ adjungierten Differentialausdrücke $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ vermöge der Formeln

$$M(z) = \frac{\mathfrak{M}_1(z)}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}} \text{ in } K_1,$$
$$= \frac{\mathfrak{M}_2(z)}{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}} \text{ in } K_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ebenfalls einen auf der Vollkugel regulären Differentialausdruck $M(z)$; dieser heiße *der zu $L(z)$ adjungierte Differentialausdruck.*

Wenn wir die Formel (12) in einem von beliebigen geschlossenen Kurven berandeten Gebiete G der Kugel mit den krummlinigen Koordinaten s, t integrieren, so erhalten wir die Integralformel

$$(14) \qquad \iint\limits_{(G)} \{w\mathfrak{L}(z) - z\mathfrak{M}(w)\}\, ds\, dt = \int\limits_{(R)} (\mathfrak{P}\, dt - \mathfrak{Q}\, ds),$$

wo das Doppelintegral linker Hand über das Innere von G und das Linienintegral rechter Hand über sämtliche Randkurven R und zwar jedesmal in der Richtung hin zu erstrecken ist, daß das Gebiet G zur linken Hand bleibt.

Wenn wir in dem Linienintegral rechter Hand an Stelle der Variabeln s, t beliebig neue Variable s', t' einführen, so sind nach dem oben be-

wiesenen Satze die transformierten Ausdrücke $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ genau die zu $\mathfrak{L}'(z)$ gehörigen Bilinearausdrücke; mittels der Formeln (13) folgt hieraus die wichtige Tatsache, daß der Integrand des Linienintegrals rechter Hand in (14) derselbe bleibt, wenn wir bei der Bildung derselben an Stelle von $\mathfrak{L}$ den beliebig transformierten Ausdruck $\mathfrak{L}'$ zugrunde legen.

Teilen wir jetzt die Vollkugel etwa durch den Äquator in die zwei Hälften K_1, K_2 und wenden auf jede derselben die Formel (14) an, so entsteht — wegen der eben bewiesenen Invarianz der Integranden in den Linienintegralen und da in dem Linienintegral der zweiten Formel der Äquator in entgegengesetzter Richtung zu durchlaufen ist, wie bei der ersten Formel — durch Addition die Formel

$$\int\int\{w\mathfrak{L}(z)-z\mathfrak{M}(w)\}\,ds\,dt=0,$$

wo das Doppelintegral über beide Kugelhälften zu erstrecken ist. Führen wir hierin die auf der Kugel regulären Differentialausdrücke $L(z)$, $M(z)$ und das Flächenelement dk der Kugel ein, so erhalten wir

(15) $$\int\{wL(z)-zM(w)\}\,dk=0,$$

wo das Integral über die Vollkugel zu erstrecken ist.

Der Differentialausdruck L heiße *von elliptischem Typus*, wenn überall in jedem der Ausdrücke $\mathfrak{L}$ für alle Werte der Variabeln s, t die Ungleichung

(16) $$ac-b^2>0$$

erfüllt ist; wir nehmen zugleich a und c positiv an.

Unser Hauptproblem besteht zunächst in der Integration der Differentialgleichung von elliptischem Typus

$$L(z)=f,$$

wo f eine überall auf der Kugel definierte Funktion bedeutet.

Um dieses Problem auf ein Problem der Theorie der Integralgleichungen zurückzuführen, bedarf es des Begriffes der Parametrix. Für den vorliegenden Fall verstehen wir unter einer *Parametrix* eine Funktion $p(st,\sigma\tau)$ des Argumentpunktes s, t und des Parameterpunktes σ, τ auf der Kugel von folgenden Eigenschaften:

1. Die Parametrix $p(st,\sigma\tau)$ ist überall in den Koordinaten des Argumentpunktes s, t und des Parameterpunktes σ, τ stetig und beliebig oft differenzierbar, außer wenn der erstere mit dem letzteren zusammenfällt, d. h. wenn gleichzeitig $s=\sigma$, $t=\tau$ wird: alsdann wird $p(st,\sigma\tau)$ logarithmisch unendlich, wie folgt:

$$p(st,\sigma\tau)=-\frac{\log\{c(\sigma\tau)(s-\sigma)^2-2b(\sigma\tau)(s-\sigma)(t-\tau)+a(\sigma\tau)(t-\tau)^2\}}{4\pi\sqrt{a(\sigma\tau)c(\sigma\tau)-(b(\sigma\tau))^2}}+S(st,\sigma\tau),$$

wo $S(st, \sigma\tau)$ eine Funktion vom Argumentpunkt s, t und vom Parameterpunkt σ, τ auf der Kugel bedeutet, die für $s = \sigma$, $t = \tau$ zwar stetig sein muß, deren zweite Ableitungen aber für $s = \sigma$, $t = \tau$ von erster Ordnung unendlich werden dürfen — während sonst überall mindestens dreimal stetige Differenzierbarkeit statt haben soll.

2. Die Parametrix ist symmetrisch in bezug auf Argumentpunkt und Parameterpunkt, d. h. es ist

$$p(st, \sigma\tau) = p(\sigma\tau, st).$$

Um eine Parametrix zu konstruieren, betrachten wir die räumlichen Koordinaten x, y, z eines Punktes der Kugel als Funktionen der krummlinigen Koordinaten s, t — indem wir immer in jedem Teilgebiet auf der Kugel die demselben eigenen Koordinaten s, t derart wählen, daß überall auf der Kugel

$$(17) \qquad y_s z_t - z_s y_t \neq 0, \quad z_s x_t - x_s z_t \neq 0, \quad x_s y_t - y_s x_t \neq 0$$

ausfällt. Dann bestimmen wir aus den drei Gleichungen

$$(18) \qquad \begin{aligned} A x_s^2 + B y_s^2 + C z_s^2 &= c(st)\sqrt{eg - f^2}, \\ A x_s x_t + B y_s y_t + C z_s z_t &= -b(st)\sqrt{eg - f^2}, \\ A x_t^2 + B y_t^2 + C z_t^2 &= a(st)\sqrt{eg - f^2} \end{aligned}$$

die Größen A, B, C als Funktionen des Argumentpunktes s, t; dieselben sind gegenüber einer Transformation der Koordinaten s, t invariant und stellen daher Funktionen auf der Kugel dar; aus (17) folgt leicht, daß die Determinante dieser Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x_s^2 & y_s^2 & z_s^2 \\ x_s x_t & y_s y_t & z_s z_t \\ x_t^2 & y_t^2 & z_t^2 \end{vmatrix}$$

stets von Null verschieden ist.

Nunmehr verstehen wir unter ξ, η, ζ die räumlichen Koordinaten des Parameterpunktes σ, τ auf der Kugel, so daß ξ, η, ζ bzw. ebenso von σ, τ abhängen, wie x, y, z von s, t, und bilden dann den Ausdruck

$$\psi(st, \sigma\tau) = A(x - \xi)^2 + B(y - \eta)^2 + C(z - \zeta)^2.$$

Setzen wir hierin

$$\begin{aligned} x - \xi &= x_s(s - \sigma) + x_t(t - \tau) + \cdots, \\ y - \eta &= y_s(s - \sigma) + y_t(t - \tau) + \cdots, \\ z - \zeta &= z_s(s - \sigma) + z_t(t - \tau) + \cdots \end{aligned}$$

ein, so ergibt sich mit Benutzung von (18) die Entwicklung

$$\begin{aligned} \psi(st, \sigma\tau) &= \sqrt{eg - f^2}\,\{c(st)(s - \sigma)^2 - 2b(st)(s - \sigma)(t - \tau) + a(st)(t - \tau)^2\} + (s - \sigma, t - \tau)_3 \\ &= \sqrt{eg - f^2}\,\{c(\sigma\tau)(s - \sigma)^2 - 2b(\sigma\tau)(s - \sigma)(t - \tau) + a(\sigma\tau)(t - \tau)^2\} + (s - \sigma, t - \tau)_3, \end{aligned}$$

wo beidemal $(s-\sigma,\ t-\tau)_3$ Ausdrücke mit Gliedern von dritter und höherer Ordnung in $s-\sigma$, $t-\tau$ bezeichnen. Mit Rücksicht hierauf ist wegen (16) gewiß

(19) $$\psi(st,\sigma\tau)>0,$$

sobald die Differenzen $s-\sigma$, $t-\tau$ absolut genügend klein gewählt, aber nicht beide Null sind: es sei ε eine so kleine Konstante, daß die Ungleichung (19) statt hat, sobald

$$0<(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2<\varepsilon^2$$

ist. Endlich sei γ der absolut größte Wert, den $\psi(st,\sigma\tau)$ annimmt, wenn der Argumentpunkt s, t und der Parameterpunkt (σ,τ) beliebig auf der Kugel variieren: alsdann stellt der Ausdruck

$$\Psi(st,\sigma\tau)=\psi(st,\sigma\tau)+\frac{2\gamma}{\varepsilon^4}\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\}^2$$

eine Funktion dar, die stets positiv ausfällt und nur für $s=\sigma$, $t=\tau$ verschwindet. Da andererseits

$$\Psi(st,\sigma\tau)=\sqrt{eg-f^2}\{c(\sigma\tau)(s-\sigma)^2-2b(\sigma\tau)(s-\sigma)(t-\tau)+a(\sigma\tau)(t-\tau)^2\}\{1+(s-\sigma,t-\tau)_1\}$$

wird, wo $(s-\sigma,\ t-\tau)_1$ einen für $s=\sigma$, $t=\tau$ mindestens von der ersten Ordnung in $s-\sigma$, $t-\tau$ verschwindenden Ausdruck bedeutet und, wie man sofort sieht, $\Psi(\sigma\tau, st)$ sich in die gleiche Gestalt bringen läßt, so besitzt der Ausdruck

$$p(st,\sigma\tau)=\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\log\Psi(st,\sigma\tau)}{\sqrt{a(\sigma\tau)c(\sigma\tau)-(b(\sigma\tau))^2}}+\frac{\log\Psi(\sigma\tau,st)}{\sqrt{a(st)c(st)-(b(st))^2}}\right\}$$

die für die Parametrix geforderten Eigenschaften; die Existenz einer Parametrix ist damit bewiesen.

Aus der oben aufgestellten Definition der Parametrix folgern wir eine Reihe von Tatsachen — analog wie dies in der bekannten Theorie des logarithmischen Potentials geschieht.

Erstens: der Ausdruck

$$M(p(st,\sigma\tau))$$

stellt eine Funktion dar, die für $s=\sigma$, $t=\tau$ höchstens von der ersten Ordnung unendlich wird. Wenn man nämlich alle diejenigen Glieder, die allein von der zweiten Ordnung unendlich werden, ausrechnet, so erkennt man, daß sie sich gegenseitig zerstören.

Zweitens: Wenn $z(st)$ irgendeine überall zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Kugel bedeutet, so ist stets

(20) $$\int\{pL(z)-zM(p)\}\,dk=-z(\sigma\tau),$$

wo das Integral über die Vollkugel zu erstrecken ist.

Zum Beweise dieser Formel beschreiben wir um den Punkt σ, τ auf der Kugel einen Kreis k_r mit dem kleinen Radius r und zerlegen dadurch die Oberfläche der Vollkugel in das kreisförmig begrenzte Gebiet k_r und das außerhalb k_r gelegene Gebiet K_r; dann wenden wir die Integralformel (14), indem wir $w(st) = p(st, \sigma\tau)$ nehmen, auf das Gebiet K_r an und führen den Grenzübergang zu $r = 0$ aus.

Drittens: wenn wir unter $z(st)$, wie soeben, eine Funktion auf der Kugel verstehen und ferner mit M denjenigen Differentialausdruck bezeichnen, der aus M hervorgeht, wenn wir darin die Variabeln s, t durch die Parameter σ, τ ersetzen, so gilt die Formel

$$\mathsf{M}\{\int zp\,dk\} = \int z\mathsf{M}(p)\,dk - z(\sigma\tau), \tag{21}$$

wo die Integrale wiederum über die Vollkugel zu erstrecken sind.

Zum Beweise haben wir die in dem Ausdruck M linker Hand geforderten Differentiationen erster und zweiter Ordnung auszuführen. Da die Parametrix $p(st, \sigma\tau)$ für $s = \sigma$, $t = \tau$ nur logarithmisch unendlich wird, so sind die einmaligen Differentiationen nach σ, τ linker Hand ohne weiteres durch Differentiationen unter dem Integralzeichen ausführbar. Aus der ersten Eigenschaft der Parametrix entnehmen wir nun die Gültigkeit von Gleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} p_\sigma &= -p_s + S, \\ p_\tau &= -p_t - T, \end{aligned} \tag{22}$$

wo S, T solche Funktionen von s, t; σ, τ sind, deren erste Ableitungen für $s = \sigma$, $t = \tau$ höchstens von erster Ordnung unendlich werden. Zerlegen wir jetzt wiederum die Oberfläche der Vollkugel in die zwei Teile K_r und k_r und setzen dann in dem über k_r zu erstreckenden Integral die letzteren Ausdrücke für p_σ, p_τ aus (22) ein, so entstehen bei geeigneter Anwendung der Produktintegration (partiellen Integration) Integralausdrücke, bei denen eine nochmalige Differentiation nach σ, τ unmittelbar durch Differentiation unter dem Integralzeichen möglich ist. Der Grenzübergang zu $r = 0$ führt schließlich zu der angegebenen Formel. —

Nunmehr sind wir imstande, das oben bezeichnete Integrationsproblem zu lösen, indem wir den folgenden Satz aufstellen und beweisen.

Satz 44. *Wenn die homogene Differentialgleichung*

$$L(z) = 0 \tag{23}$$

keine von Null verschiedene, auf der ganzen Kugel stetige Lösung besitzt, so hat die Differentialgleichung

$$L(z) = f, \tag{24}$$

wo f irgendeine gegebene Funktion auf der Kugel bedeutet, stets eine stetige Lösung; die adjungierte Differentialgleichung

(25) $$M(z) = 0$$

läßt in diesem Falle gewiß keine Lösung zu.

Besitzt dagegen die homogene Differentialgleichung (23) *Lösungen, so lassen sich aus diesen stets eine gewisse endliche Anzahl, n, linear von einander unabhängiger Lösungen auswählen, so daß jede Lösung von* (23) *eine lineare Kombination derselben wird; die adjungierte Differentialgleichung* (25) *besitzt in diesem Falle auch genau n linear unabhängige Lösungen, und die Differentialgleichung* (24) *ist dann und nur dann lösbar, wenn die gegebene Funktion f die n Integralbedingungen*

(26) $$\int f\psi_h dk = 0 \qquad (h = 1, 2, 3 \dots n)$$

erfüllt, wo $\psi_1, \dots, \psi_n$ *jene linear voneinander unabhängigen Lösungen von* (25) *bedeuten.*

Zum Beweise setzen wir zunächst voraus, daß die Differentialgleichung (23) keine Lösung besitzt. Eine Lösung z der Differentialgleichung (24) muß wegen (20) die Integralgleichung

$$\int \{pf - zM(p)\} dk = - z(\sigma\tau)$$

oder

(27) $$\int zM(p)dk - z(\sigma\tau) = \int pfdk$$

befriedigen; der Kern $M(p)$ dieser Integralgleichung ist der ersten Bemerkung auf S. 225 zufolge eine solche Funktion von s, t, σ, τ, die für $s = \sigma$, $t = \tau$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Die Gesetze über die Auflösung von Integralgleichungen sind, wie bereits Fredholm gezeigt hat, in diesem Falle in gleicher Weise gültig, wie wenn der Kern eine durchweg stetige Funktion wäre. Andrerseits läßt sich auch, ähnlich wie dies auf S. 217—218 geschehen ist, zeigen, daß eine Lösung der Integralgleichung (27) beliebig oft stetig differenzierbar ist, falls diese Annahme für f zutrifft.

Nach der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen hängt die Lösbarkeit der Integralgleichung (27) von der Beschaffenheit der entsprechenden homogenen Integralgleichung

(28) $$\int zM(p)dk - z(\sigma\tau) = 0$$

ab. Die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen dieser homogenen Integralgleichung sei N, und die Lösungen seien $\Phi_1, \dots, \Phi_N$. Wegen (20) haben wir dann

$$\int pL(\Phi_h) dk = 0 \qquad (h = 1, \dots, N),$$

oder wenn

(29) $$X_h = L(\Phi_h) \qquad (h = 1, \dots, N)$$

gesetzt wird,

(30) $$\int p \mathsf{X}_h dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, N),$$

d. h. die N Funktionen $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_N$ genügen, für z eingesetzt, der Gleichung

(31) $$\int pz dk = 0,$$

und wegen (21) sind sie demnach auch Lösungen der homogenen Integralgleichung

(32) $$\int z \mathsf{M}(p) dk - z(\sigma\tau) = 0.$$

Diese homogene Integralgleichung ist aber diejenige, die aus der homogenen Integralgleichung (28) entsteht, wenn man in deren Kern die Argumente s, t mit den Parametern σ, τ vertauscht. Nun sind die N Funktionen X_h voneinander linear unabhängig, da ja sonst wegen (29) eine von Null verschiedene Lösung der Differentialgleichung (23) existieren müßte. Nach den allgemeinen Sätzen über Integralgleichungen besitzt die Integralgleichung mit dem transponierten Kern $\mathsf{M}(p)$ genau ebenso viele linear unabhängige Lösungen wie die ursprüngliche; es ist mithin jede Funktion z, die der Gleichung (31) genügt, da sie dann auch (32) erfüllt, notwendig in der Gestalt

$$z = C_1 \mathsf{X}_1 + \cdots + C_N \mathsf{X}_N$$

darstellbar, wo $C_1, \ldots, C_N$ geeignete Konstante bedeuten.

Da hiernach die N Funktionen X_h die sämtlichen Lösungen der homogenen Integralgleichung (32) ausmachen, so sind nach der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit der inhomogenen Integralgleichung (27) die folgenden

$$\int\int \mathsf{X}_h(\sigma\tau) p f(st) dk dz = 0, \qquad (h = 1, \ldots, N)$$

wo die Vollkugel sowohl bei der Integration nach dem Argumentpunkt s, t, als auch bei der Integration nach dem Parameterpunkt σ, τ als Integrationsgebiet zu nehmen ist. Da aber wegen (30) diese Bedingungen stets erfüllt sind, so besitzt (27) stets eine Lösung; es sei φ^* diese Lösung, so daß

(33) $$\int \varphi^* M(p) dk - \varphi^*(\sigma\tau) = \int p f dk$$

wird. Setzen wir dann andererseits in (20) $z = \varphi^*$ ein und addieren die so entstehende Gleichung zu (33), so ergibt sich

$$\int p \{L(\varphi^*) - f\} dk = 0.$$

Wegen der vorhin gefundenen Tatsache folgt hieraus

$$L(\varphi^*) - f = C_1 \mathsf{X}_1 + \cdots + C_N \mathsf{X}_N,$$

wo $C_1, \ldots, C_N$ geeignete Konstanten sind. Wegen (29) ist demnach

$$\varphi = \varphi^* - C_1 \Phi_1 - \cdots - C_N \Phi_N$$

eine Lösung der Differentialgleichung (24).

Wir erkennen nunmehr auch leicht, daß (25) keine von Null verschiedene Lösung besitzt. Wäre nämlich ψ eine solche Lösung und bestimmen wir dann — was nach dem eben Bewiesenen stets möglich ist — eine Funktion φ derart, daß

$$L(\varphi) = \psi$$

ist, so wird aus (15) für $w = \psi$, $z = \varphi$ die Gleichung

$$\int \psi^2 dk = 0,$$

die nicht statthaben kann, da ja ψ nicht identisch verschwinden sollte. Damit ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

Zum Beweise des zweiten Teiles des Satzes bezeichnen wir mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein vollständiges System von n linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (23). Sodann betrachten wir wiederum die inhomogene Integralgleichung (27) und die zu ihr zugehörige homogene Integralgleichung (28). Die letztere läßt, wie aus (20) sofort folgt, die Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ zu. Außer diesen n Lösungen und deren linearen Kombinationen kann die Integralgleichung (28) noch weitere Lösungen besitzen; unter diesen wählen wir ein System untereinander und von den Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ linear unabhängiger Lösungen $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ derart aus, daß alle Lösungen von (28) durch $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_N$ linear darstellbar sind. Wir bilden nun, wie vorhin beim Beweise des ersten Teils unseres Satzes, die N Funktionen

$$\text{(34)} \qquad \mathrm{X}_h = L(\Phi_h) \qquad (h = 1, \ldots, N);$$

dieselben genügen, wie aus (20) folgt, den Gleichungen

$$\text{(35)} \qquad \int p \mathrm{X}_h dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, N)$$

und sind demnach, für z eingesetzt, wegen (21) auch Lösungen der homogenen Integralgleichung (32). Die N Funktionen $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_N$ sind voneinander linear unabhängig, da sonst entgegen unserer Annahme aus (34) sofort das Bestehen einer linearen Relation zwischen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ folgen würde.

Da die homogene Integralgleichung (28) genau $n + N$ linear unabhängige Lösungen besitzt, so muß nach der allgemeinen Theorie die Integralgleichung (32) mit dem transponierten Kern ebenfalls genau $n + N$ linear unabhängige Lösungen besitzen, d. h. außer den Funktionen $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_N$ gibt es noch genau n Funktionen $\chi_1, \ldots, \chi_n$, die ebenfalls der Integralgleichung (32) genügen und mit $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_N$ zusammen ein volles System von $n + N$ Lösungen der Integralgleichung (32) bilden.

Die n Funktionen $\chi_1, \ldots, \chi_n$ denken wir uns nun durch geeignete lineare Kombinationen ihrer selbst derart ersetzt, daß gerade für die ν Funktionen $\chi_1, \ldots, \chi_\nu$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$ die Gleichungen

(36) $$\int p\chi_h dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, \nu)$$

statthaben und überdies, falls wir aus den übrigen $n - \nu$ Funktionen $\chi_{\nu+1}, \ldots, \chi_n$ die $n - \nu$ Funktionen

$$\psi_h = \int p\chi_h dk \qquad (h = \nu + 1, \ldots, n)$$

bilden, diese $n - \nu$ Funktionen $\psi_{\nu+1}, \ldots, \psi_n$ noch linear voneinander unabhängig ausfallen. Wegen (21) sind $\psi_{\nu+1}, \ldots, \psi_n$ Lösungen der Differentialgleichung (25).

Nunmehr nehmen wir an, daß der zu beweisende Satz für alle Fälle, in denen die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung kleiner als n ausfällt, bereits als richtig erkannt sei; dann folgt, daß die Differentialgleichung (25) mindestens n linear unabhängige Lösungen besitzen muß; denn wäre ihre Anzahl kleiner als n, so würde unser Satz, auf (25) angewandt, aussagen, daß die zu (25) adjungierte Differentialgleichung (23) nur ebensoviel, gewiß also nicht n linear unabhängige Lösungen besitzen könnte, wie wir doch gegenwärtig vorausgesetzt haben. Es ist hiernach gewiß möglich zu den $n - \nu$ Funktionen $\psi_{\nu+1}, \ldots, \psi_n$ noch ν weitere Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_\nu$ hinzuzufügen, derart, daß die Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ein System von n linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (25) bilden.

Aus (15) folgt sofort, daß, wenn die Differentialgleichung (24) lösbar sein soll, notwendig die Integralbedingungen (26) erfüllt sein müssen. Andererseits besitzt die inhomogene Integralgleichung (27) der allgemeinen Theorie zufolge gewiß eine Lösung, wenn die $n + N$ Bedingungen

(37) $$\int\int X_h(\sigma\tau) p f(st) dk d\varkappa = 0 \qquad (h = 1, \ldots, N),$$

(38) $$\int\int \chi_h(\sigma\tau) p f(st) dk d\varkappa = 0 \qquad (h = 1, \ldots, \nu),$$

(39) $$\int\int \chi_h(\sigma\tau) p f(st) dk d\varkappa = 0 \qquad (h = \nu + 1, \ldots, n)$$

bestehen. Nun sind aber wegen (35), (36) die Gleichungen (37), (38) für jede Funktion f erfüllt und die Gleichungen (39) erhalten die Gestalt

(40) $$\int f\psi_h dk = 0 \qquad (h = \nu + 1, \ldots, n).$$

Bedeutet also f eine diesen $n - \nu$ Bedingungen (40) genügende Funktion, so gibt es gewiß eine Funktion $z = \varphi^*$, die der Integralgleichung (27) genügt. Addieren wir diese Gleichung zu derjenigen, die aus (20) für $z = \varphi^*$ entsteht, so erhalten wir

(41) $$\int p\{L(\varphi^*) - f\} dk = 0,$$

und hieraus entnehmen wir wie vorhin

$$L(\varphi^*) - f = c_1\chi_1 + \cdots + c_n\chi_n + C_1 X_1 + \cdots + C_N X_N,$$

wo $c_1, \ldots, c_n$, $C_1, \ldots, C_N$ geeignete Konstante bedeuten. Setzen wir aber diesen Ausdruck für $L(\varphi^*) - f$ in (41) ein, so folgt sofort mit Rücksicht auf (35), (36) wegen der linearen Unabhängigkeit der $n - \nu$ Funktionen ψ_h, daß

$$c_{\nu+1} = 0, \ldots, c_n = 0$$

sein muß. Wegen (34) befriedigt mithin

$$\varphi = \varphi^* - C_1 \Phi_1 - \cdots - C_N \Phi_N$$

die Differentialgleichung

(42) $$L(\varphi) = f + c_1 \chi_1 + \cdots + c_\nu \chi_\nu.$$

Wir wollen nun zeigen, daß die weiteren der Funktion f aufzuerlegenden ν Bedingungen

(43) $$\int f \psi_h dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, \nu)$$

notwendig

(44) $$c_1 = 0, \ldots, c_\nu = 0$$

zur Folge haben. Zu dem Zwecke setzen wir in (15) $w = \psi_h$ $(h = 1, \ldots, \nu)$ und $z = \varphi$; dann erhalten wir wegen (42)

$$\int \psi_h f dk + c_1 \int \psi_h \chi_1 dk + \cdots + c_\nu \int \psi_h \chi_\nu dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, \nu)$$

oder

(45) $$a_{h1} c_1 + \cdots + a_{h\nu} c_\nu = A_h \qquad (h = 1, \ldots, \nu),$$

wenn zur Abkürzung

$$\int \psi_h f dk = - A_h \qquad (h = 1, \ldots, \nu),$$

$$\int \psi_h \chi_l dk = a_{hl} \qquad (h, l = 1, \ldots, \nu)$$

gesetzt ist. Da wir nun offenbar durch geeignete Wahl der Funktion f unter Wahrung der Bedingungen (40) den Größen A_h beliebige Werte erteilen können und nach dem eben Bewiesenen die Gleichungen (45) für alle solchen A_h Lösungen $c_1, \ldots, c_\nu$ haben, so muß die Determinante der Größen a_{hk} notwendig von Null verschieden sein. Legen wir daher der Funktion f noch die weiteren ν Bedingungen (43) auf, d. h. nehmen wir

$$A_1 = 0, \ldots, A_\nu = 0,$$

so folgt aus (45) notwendig (44), d. h. wegen (42) ist φ eine Lösung der Differentialgleichung (24).

Um den Beweis unseres Satzes zu vollenden, bleibt nur noch übrig zu bemerken, daß die Gleichung (25) auch nicht mehr als n linear unabhängige Lösungen haben kann. In der Tat, gäbe es noch eine von $\psi_1, \ldots, \psi_n$ linear unabhängige Lösung von (25), etwa ψ_{n+1}, so würde, wie aus (15) sofort folgt, die Gleichung

$$\int f \psi_{n+1} dk = 0$$

noch eine weitere notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (24) darstellen, was dem eben Bewiesenen widerspricht.

Für die weitere Entwicklung unserer Theorie ist eine Bemerkung über die Beschaffenheit der Funktion f wichtig. Wenn nämlich f in (24) eine nicht durchweg stetige Funktion ist, so bleiben bei geeigneten Voraussetzungen dennoch alle bisher angestellten Überlegungen gültig: es sei etwa f eine solche Funktion des Argumentpunktes s, t auf der Kugel, die überall stetig ist mit Ausnahme der Stelle $s = \sigma$, $t = \tau$, wo sie von der ersten Ordnung unendlich wird. Um bei dieser Annahme den Charakter der Lösung z der Integralgleichung (24) an der Stelle σ, τ festzustellen, bedenken wir, — wie dies aus der Fredholmschen Methode der inhomogenen Integralgleichung ersichtlich ist — daß für die Beurteilung des Verhaltens jener Lösung z von (24) das Verhalten der rechten Seite der Integralgleichung (27) den Ausschlag geben muß. Nun ist diese rechte Seite, wie man durch eine leichte Untersuchung feststellen kann, bei der über f gemachten Annahme eine solche Funktion des Argumentpunktes s, t, die an der Stelle σ, τ stetig ist und deren zweite Ableitungen daselbst von der ersten Ordnung unendlich werden; den gleichen Charakter an der Stelle σ, τ zeigt also in diesem Falle die Lösung der Differentialgleichung (24).

Wir wollen dieses Ergebnis zur Konstruktion der Greenschen Funktion des Differentialausdruckes $L(z)$ anwenden; dabei sei der Kürze halber $L(z)$ als ein sich selbst adjungierter Differentialausdruck vorausgesetzt.

Es sind wie im obigen Satze 44 (S. 226—227) zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Differentialgleichung (23) stetige Lösungen besitzt oder nicht. In letzterem Falle ist jederzeit eine geeignet gewählte Lösung der Integralgleichung (27), wenn wir darin $f = L(p)$ nehmen, zugleich die Lösung der Differentialgleichung

$$L(z) = L(p).$$

Bezeichnen wir diese Lösung mit φ, so befriedigt offenbar die Funktion

$$G(st, \sigma\tau) = p - \varphi$$

die Differentialgleichung (23); G heiße *die Greensche Funktion des Differentialausdruckes* $L(z)$. Aus den obigen Darlegungen über das Verhalten der Lösung φ an der Stelle σ, τ erkennen wir, daß die Greensche Funktion G an der Stelle σ, τ gerade die logarithmische Unstetigkeit besitzt, wie sie für die Parametrix verlangt worden ist; sie ist durch diese Eigenschaft, sowie durch die Forderung, der Differentialgleichung (23) zu genügen, völlig eindeutig bestimmt.

Die Symmetrieeigenschaft der Greenschen Funktion

$$G(st, \sigma\tau) = G(\sigma\tau, st)$$

folgt in der üblichen Weise[1]) mit Benutzung des Umstandes, daß der Differentialausdruck $M(z)$ nach Voraussetzung mit $L(z)$ identisch ausfällt.

Nunmehr nehmen wir im Gegenteil an, die Differentialgleichung (23) besitze genau n voneinander linear unabhängige Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$; wir denken uns dieselben derart normiert, daß die Orthogonalitätsrelationen

$$\int \varphi_h \varphi_l dk = 0 \qquad (h, l = 1, \ldots, n, h \neq l),$$

$$\int \varphi_h^2 dk = 1 \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

gelten. Nehmen wir dann

$$f(st) = L(p) - \varphi_1(\sigma\tau)\varphi_1(st) - \cdots - \varphi_n(\sigma\tau)\varphi_n(st),$$

so erfüllt f, wie aus (20) sofort zu ersehen ist, die n Bedingungen

$$\int f \varphi_h dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

und nach dem Früheren besitzt mithin die Differentialgleichung (24) eine Lösung $z = \varphi$, die an der Stelle σ, τ stetig ausfällt und deren zweite Ableitungen daselbst von der ersten Ordnung unendlich werden. Wir setzen nunmehr

$$G(st, \sigma\tau) = p - \varphi - \int (p - \varphi)\varphi_1 dk \cdot \varphi_1 - \cdots - \int (p - \varphi)\varphi_n dk \cdot \varphi_n;$$

dann erfüllt G die n Integralbedingungen

(46) $$\int G(st, \sigma\tau)\varphi_h(st) dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

und genügt überdies der Differentialgleichung

(47) $$L(G) = \varphi_1(\sigma\tau)\varphi_1(st) + \cdots + \varphi_n(\sigma\tau)\varphi_n(st).$$

G heiße die Greensche Funktion (im erweiterten Sinne) des Differentialausdruckes $L(z)$. Die Greensche Funktion G besitzt an der Stelle σ, τ gerade die logarithmische Unstetigkeitsstelle, wie sie für die Parametrix verlangt worden ist; sie ist durch diese Eigenschaft, sowie durch die Forderung, der Differentialgleichung (47) und den Integralbedingungen (46) zu genügen, völlig eindeutig bestimmt. Auch gilt für sie das Symmetriegesetz

$$G(st, \sigma\tau) = G(\sigma\tau, st).$$

Endlich zeigt man in üblicher Weise, daß stets vermittels der Greenschen Funktion die Lösung der Differentialgleichung (24) durch die Formel

(48) $$z = -\int G f(\sigma\tau) d\varkappa$$

---

1) Vgl. den Beweis dieses Symmetriegesetzes im Falle einer Variabeln, wie er in Kapitel VII S. 45 angedeutet worden ist.

geliefert wird, und zwar in dem zuletzt erörterten Falle diejenige Lösung, die die n Orthogonalitätsrelationen

(49) $$\int z\varphi_h dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

erfüllt.

Nachdem im Vorstehenden die Theorie der Integration der linearen partiellen Differentialgleichung vom elliptischen Typus auf der Kugel erledigt worden ist, soll nunmehr die in Kapitel I—VI und XIV dargelegte Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern und zwar die der orthogonalen Integralgleichungen auf die lineare Differentialgleichung

$$L(z) + \lambda z = 0$$

angewandt werden, wo $L(z)$ einen sich selbst adjungierten elliptischen Differentialausdruck auf der Kugel bedeutet. Die Greensche Funktion $G(st, \sigma\tau)$ dieses Differentialausdrucks $L(z)$ wird nach dem Obigen symmetrisch in bezug auf den Argumentpunkt s, t und den Parameterpunkt σ, τ der Kugel. Unsere Theorie liefert nun, wenn wir $G(st, \sigma\tau)$ als Kern einer orthogonalen Integralgleichung auf der Kugel nehmen, folgende Sätze:

Es gibt gewiß einen oder beliebig viele Werte $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ und zugehörige Funktionen $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$ auf der Kugel, so daß

(50) $$\psi^{(m)}(st) = \lambda^{(m)} \int G(st, \sigma\tau)\psi^{(m)}(\sigma\tau)d\varkappa$$

wird, die sogenannten *Eigenwerte* und *Eigenfunktionen* des Kerns G; die letzteren besitzen die Orthogonalitätseigenschaft.

Jede Funktion, die sich bei geeigneter Wahl der Funktion $g(\sigma\tau)$ in der Gestalt

(51) $$f(st) = \int G(st, \sigma\tau)g(\sigma\tau)d\varkappa$$

darstellen läßt, ist in eine auf Fouriersche Weise gebildete Reihe nach den Eigenfunktionen $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$ entwickelbar:

(52) $$f = c_1\psi^{(1)} + c_2\psi^{(2)} + \cdots,$$

wo $c_1, c_2, \ldots$ die Fourier-Koeffizienten von f in bezug auf das Orthogonalsystem $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$ bedeuten.

Wir stellen nunmehr die Bedeutung der Bedingung (51) fest. Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die n zueinander orthogonalen Integrale der Gleichung

$$L(z) = 0,$$

dann muß wegen (46) jede in der Gestalt (51) darstellbare Funktion f die n Bedingungen

(53) $$\int \varphi_h(st)f(st)dk = 0, \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

erfüllen. Umgekehrt ist jede diesen n Bedingungen genügende mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion f in der Gestalt (51) darstellbar.

Setzen wir nämlich $g = -L(f)$, so genügt, wie aus (15) folgt, die Funktion g den n Bedingungen

$$\int \varphi_h g\, dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

und daher wird nach (48)

$$f^* = \int G(st, \sigma\tau) g(\sigma\tau)\, d\varkappa$$

eine den Bedingungen (49) genügende Lösung der Differentialgleichung

$$L(z) = g(st).$$

Da aber diese Gleichung nur eine diesen n Bedingungen genügende Lösung besitzen kann, so ist genau $f^* = f$ und mithin f in der Gestalt (51) darstellbar. Aus (50) und (46) schließen wir leicht, daß

$$\int \varphi_h \psi^{(i)}\, dk = 0$$

ausfällt; mithin bilden die Funktionen

(54) $$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$$

ein System von Orthogonalfunktionen auf der Kugel.

Wir setzen

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0, \lambda_{n+1} = \lambda^{(1)}, \lambda_{n+2} = \lambda^{(2)}, \ldots$$
$$\varphi_{n+1} = \psi^{(1)}, \varphi_{n+2} = \psi^{(2)}, \ldots$$

und bezeichnen *die Konstanten* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *als die Eigenwerte und die Funktionen* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *als die zugehörigen Eigenfunktionen der Differentialgleichung*

(55) $$L(z) + \lambda z = 0,$$

da sie das volle System stetiger Lösungen dieser Differentialgleichung bilden. Nach dem Obigen ergibt sich sofort:

Satz 45. *Jede mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Kugel läßt sich in der Fourierschen Weise in eine nach den Eigenfunktionen* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *fortschreitende Reihe entwickeln; die Anzahl der Eigenwerte und der Eigenfunktionen der Differentialgleichung* (55) *ist mithin unendlich.*

Wir gehen nun dazu über, das zur Differentialgleichung (55) gehörige Dirichletsche Variationsproblem aufzustellen und zu untersuchen.[1] Da der Differentialausdruck

$$\mathfrak{L}(z) = a z_{ss} + 2b z_{st} + c z_{tt} + l z_s + m z_t + n z$$

als sich selbst adjungiert angenommen worden ist, so haben wir

$$a_s + b_t = l,$$
$$b_s + c_t = m,$$

1) Vgl. die den Fall einer Variabeln betreffenden analogen Entwicklungen in Kapitel VII, S. 57f.

und es gilt die Identität

(56) $$z\mathfrak{L}(z) + \mathfrak{A}(z) = \mathfrak{P}_s + \mathfrak{Q}_t,$$

wo

$$\mathfrak{A}(z) \equiv a z_s^2 + 2 b z_s z_t + c z_t^2 - n z^2$$

der zu $\mathfrak{L}(z)$ gehörige quadratische Differentialausdruck und

$$\mathfrak{P} \equiv z(a z_s + b z_t),$$
$$\mathfrak{Q} \equiv z(b z_s + c z_t)$$

die zu $\mathfrak{L}(z)$ gehörigen Nebenausdrücke heißen mögen. Führen wir in $\mathfrak{A}(z)$ an Stelle von s, t neue Variable s', t' ein, so heiße der durch Multiplikation mit der Funktionaldeterminante

$$s_{s'} t_{t'} - s_{t'} t_{s'}$$

entstehende Ausdruck $\mathfrak{A}'(z)$ der transformierte Ausdruck von $\mathfrak{A}(z)$; ferner mögen die Ausdrücke

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} t_{t'} - \mathfrak{Q} s_{t'},$$
$$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{P} t_{s'} + \mathfrak{Q} s_{s'},$$

wenn man rechter Hand in $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ die neuen Variabeln s', t' an Stelle von s, t einführt, die transformierten Ausdrücke von $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ heißen. Es besteht dann die Tatsache:

Der transformierte Ausdruck $\mathfrak{A}'(z)$ ist genau der zu $\mathfrak{L}'(z)$ gehörige quadratische Differentialausdruck, und die transformierten Ausdrücke $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}'$ sind genau die zu $\mathfrak{L}'(z)$ gehörigen Nebenausdrücke.

Aus der Differentialformel (56) ergibt sich durch Integration über ein Gebiet G mit der Randkurve R die Integralformel

$$\iint\limits_{(G)} \{z\mathfrak{L}(z) + \mathfrak{A}(z)\}\, ds\, dt = \int\limits_{(R)} (\mathfrak{P}\, dt - \mathfrak{Q}\, ds),$$

und indem wir diese — entsprechend wie wir oben auf S. 222—223 beim Beweise der Formel (15) verfahren — auf die zwei Hälften der Vollkugel anwenden, gelangen wir auf Grund der eben gewonnenen Tatsache zu der Formel

$$\iint \{z\mathfrak{L}(z) + \mathfrak{A}(z)\}\, ds\, dt = 0,$$

wo das Doppelintegral über beide Kugelhälften zu erstrecken ist. Setzen wir nun — entsprechend wie oben S. 222 bei der Definition des Ausdruckes $L(z)$ —

$$A(z) = \frac{\mathfrak{A}(z)}{\sqrt{eg - f^2}} = \frac{\mathfrak{A}'(z)}{\sqrt{e'g' - f'^2}},$$

so ist, — ebenso wie oben der Ausdruck $L(z)$ —, der quadratische Differentialausdruck $A(z)$ eindeutig und widerspruchslos überall auf der Kugel definiert, und, wenn z eine Funktion des Ortes auf der Kugel be-

deutet, so stellt $A(z)$ einen von der Wahl der krummlinigen Koordinaten s, t unabhängigen Wert dar. Durch Einführung von $L(z)$ und $A(z)$ nimmt die obige Integralformel die Gestalt an

$$\int \{zL(z) + A(z)\} dk = 0,$$

wo das Integral über die Vollkugel zu erstrecken ist. Das Integral

(57) $$D(z) = \int A(z) dk = -\int zL(z) dk$$

heiße das zu $L(z)$ gehörige *Dirichletsche Integral.* Durch Variation von (57) erhalten wir leicht mit Rücksicht auf (15)

$$\delta D(z) = -2 \int L(z) \delta z dk.$$

Wegen (16) ist, wenn wir noch $a > 0$ annehmen, gewiß stets

$$a z_s^2 + 2b z_s z_t + c z_t^2 \geqq 0.$$

Bestimmen wir sodann eine solche Konstante C, die überall auf der Kugel die Werte der Funktion

$$\frac{n}{\sqrt{eg - f^2}} = \frac{n'}{\sqrt{e'g' - f'^2}}$$

übertrifft, so ist gewiß für alle Funktionen z

$$A(z) + Cz^2 \geqq 0$$

und folglich auch

$$\int \{A(z) + Cz^2\} dk = \int \{-zL(z) + Cz^2\} dk \geqq 0.$$

Insbesondere ergibt sich hieraus für $z = \varphi_h$ mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$L(\varphi_h) = -\lambda_h \varphi_h,$$
$$\int \varphi_h^2 dk = 1$$

die Ungleichung

$$\lambda_h + C \geqq 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_h \geqq -C,$$

d. h. *es gibt zur Differentialgleichung* (55) *nur eine endliche Anzahl negativer Eigenwerte.*

Wir denken uns die Eigenwerte von (55) der Größe nach geordnet, so daß λ_1 der kleinste wird und allgemein

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 < \lambda_3 \leqq \ldots$$

ist.

Das zur Differentialgleichung (55) gehörige Variationsproblem lautet nun: man soll eine Funktion z auf der Kugel derart bestimmen, daß $D(z)$ zum Minimum wird, während die Nebenbedingung

(58) $$\int z^2 dk = 1$$

erfüllt ist. Zur Lösung dieses Problems setzen wir an

$$z = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots.$$

Wegen

$$D(z) = -\int z L(z) dk$$

wird

$$D(z) = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \cdots,$$

während die Nebenbedingung (58) die Gestalt

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots = 1$$

erhält. Daraus entnehmen wir sofort den

Satz 46. *Das Minimum des Dirichletschen Integrals $D(z)$ bei der Nebenbedingung (58) ist gleich dem kleinsten Eigenwert λ_1 der Differentialgleichung (55) und wird für $z = \varphi_1$ angenommen, wo φ_1 die zu λ_1 gehörige Eigenfunktion von (55) bedeutet. Werden zu der Nebenbedingung (55) noch die weiteren $h-1$ Nebenbedingungen*

$$\int \varphi_1 z dk = 0, \quad \ldots, \quad \int \varphi_{h-1} z dk = 0$$

hinzugefügt, so ist λ_h der Minimalwert von $D(z)$; derselbe wird für $z = \varphi_h$ angenommen.

Als einfachstes Beispiel für die vorstehende Theorie können die bereits in Kapitel VIII behandelten Kugelfunktionen dienen.

Zum Schluß dieses Abschnittes beweisen wir noch folgenden Satz, welcher besonders für die Anwendungen dieser Theorie von Wichtigkeit ist.

Satz 47. *Wenn die Koeffizienten des linearen Differentialausdruckes $L(z)$ für alle innerhalb und auf die Grenzen des Intervalles*

$$\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$$

fallenden Werte von μ regulär analytische Funktionen eines Parameters μ sind, und wenn für eben diese Werte μ auch stets die Ungleichung (16) gilt, so ist allemal der h-te Eigenwert λ_h eine stetige Funktion von μ.

Da nach den oben bewiesenen Sätzen für jeden besonderen Wert $\mu = \mu_0$ stets λ_h eine endliche und eindeutig bestimmte Größe darstellt, so kommt es nur darauf an, zu zeigen, daß λ_h als Funktion von μ an der Stelle $\mu = \mu_0$ auch stetig ausfällt. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit $L_0(z)$ den Differentialausdruck $L(z)$ für $\mu = \mu_0$ und nehmen zunächst der Kürze halber an, daß die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$L_0(z) + \lambda z = 0 \tag{59}$$

sämtlich positiv ausfallen, so daß die Differentialgleichung

$$L_0(z) = 0$$

gewiß keine stetige Lösung besitzt; es sei G_0 die zu $L_0(z)$ gehörige Greensche Funktion, ferner p die nach der Vorschrift auf S. 224—225 konstruierte von μ abhängige Parametrix für $L(z)$, und endlich bedeute

p_0 den aus p für $\mu = \mu_0$ entstehenden Ausdruck, so daß p_0 zugleich die nach jener Vorschrift gebildete Parametrix für L_0 ist.

Um nun die Greensche Funktion für $L(z)$ zu bilden, wenden wir das oben S. 232f. eingeschlagene Verfahren an, indem wir in (27) an Stelle der dort mit p bezeichneten Parametrix den Ausdruck

$$p^* = p + G_0 - p_0$$

nehmen, der ebenfalls die Eigenschaften einer Parametrix für $L(z)$ besitzt. Die so aus (27) entstehende Integralgleichung

(60) $$\int z L(p^*) dk - z(\sigma\tau) = \int p^* f dk$$

besitzt den Kern

(61) $$\begin{aligned} K(st, \sigma\tau) = L(p^*) &= L(p) + L(G_0 - p_0) \\ &= L(p) + L_0(G_0 - p_0) + (\mu - \mu_0)\bar{L}(G_0 - p_0), \end{aligned}$$

wo $\bar{L}$ einen gewissen noch vom Parameter μ abhängigen Differentialausdruck zweiter Ordnung bedeutet. Da $G_0 - p_0$ eine Funktion von s, t; σ, τ ist, deren zweite Ableitungen für $s = \sigma$, $t = \tau$ höchstens von der ersten Ordnung unendlich werden, so stellt $\bar{L}(G_0 - p_0)$ eine Funktion dar, deren Produkt mit $\sqrt{(s-\tau)^2 + (t-\tau)^2}$ gewiß absolut genommen für alle s, t; σ, τ unterhalb einer von μ unabhängigen Schranke bleibt. Andererseits ist, wenn wir

$$L(p) + L_0(G_0 - p_0) = L(p) - L_0(p_0) = (\mu - \mu_0)\bar{\bar{L}}$$

setzen, $\bar{\bar{L}}$ ebenfalls eine Funktion, deren Produkt mit $\sqrt{(s-\sigma)^2 + (t-\tau)^2}$ absolut genommen gewiß für alle s, t; σ, τ unterhalb einer von μ unabhängigen Schranke bleibt — da ja $L(p)$ für $s = \sigma$, $t = \tau$ nur höchstens von der ersten Ordnung unendlich wird und $L_0(p_0)$ den Wert von $L(p)$ für $\mu = \mu_0$ bedeutet. Wegen (61) ist demnach auch

$$K(st, \sigma\tau) = (\mu - \mu_0)\bar{K}(st, \sigma\tau),$$

wo $\bar{K}$ eine Funktion ist, deren Produkt mit $\sqrt{(s-\sigma)^2 + (t-\tau)^2}$ absolut genommen für alle s, t; σ, τ unterhalb einer von μ unabhängigen Schranke bleibt. Infolge der letzteren Eigenschaft erkennt man, daß der aus $\bar{K}$ gebildete dreifach zusammengesetzte Kern $\bar{K}\bar{K}\bar{K}$ eine stetige Funktion von s, t; σ, τ wird, deren absolute Werte für alle s, t; σ, τ unterhalb einer von μ abhängigen Schranke bleiben. Hieraus wiederum folgt, daß der aus K gebildete dreifach zusammengesetzte Kern KKK ebenfalls stetig ist und überdies für ihn eine positive Zahl ε gefunden werden kann derart, daß die absoluten Werte von KKK für alle s, t; σ, τ kleiner als $\frac{1}{2}$ bleiben, sobald nur μ innerhalb des durch die Ungleichung

(62) $$|\mu - \mu_0| \leq \varepsilon$$

bestimmten Intervalles bleibt. Die so gefundene Tatsache bedingt, daß

unter dieser einschränkenden Bedingung (62) für μ die inhomogene Integralgleichung

$$\int z K dk - z(\sigma\tau) = F(\sigma\tau)$$

stets nach der Neumannschen Methode lösbar ist, und daß die Lösung z gleichmäßig für alle s, t; σ, τ in μ stetig wird, während die entsprechende homogene Integralgleichung

$$\int z K dk - z(\sigma\tau) = 0$$

keine Lösung besitzt. Wenden wir dieses Resultat auf die Integralgleichung (60) für $f = L(p^*)$ an, so erkennen wir, daß dieselbe, falls μ der Bedingung (62) genügt, gewiß eine und nur eine Lösung φ besitzt, und daß diese Lösung für $\mu = \mu_0$ gleichmäßig für alle s, t; σ, τ gegen Null konvergiert — da ja p^* für $\mu = \mu_0$ in G_0 und demnach $L(p^*)$ für $s, t \neq \sigma, \tau$ in Null übergeht. Nach dem von uns befolgten Verfahren ist

$$G = p^* - \varphi$$

die Greensche Funktion von $L(z)$, falls μ der Bedingung (62) genügt. Hieraus folgt wegen der eben erkannten Beschaffenheit von φ, daß der aus G zweifach zusammengesetzte Kern GG gleichmäßig für alle s, t; σ, τ in μ stetig ausfällt. Bilden wir daher nach Fredholm den Nenner der lösenden Funktion für die Integralgleichung

$$\lambda \int z\, GG dk - z(\sigma\tau) = F(\sigma\tau),$$

so erkennen wir, daß diese beständig konvergente Potenzreihe in λ überdies gleichmäßig für alle der Bedingung (62) genügenden Werte von μ konvergiert. Da andererseits die Nullstellen dieser Potenzreihe sämtlich reell, und zwar die Eigenwerte des Kerns GG sind, diese aber nichts anderes als die Quadrate der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sind, so folgt, daß allgemein der $h$te Eigenwert λ_h^2 sich stetig in μ ändert; das gleiche gilt mithin auch von λ_h, solange μ auf das Intervall (62) beschränkt bleibt.

Trifft die zu Anfang dieser Beweisführung gemachte Annahme, wonach die Eigenwerte der Differentialgleichung (59) sämtlich positiv ausfallen, nicht zu, so bezeichnen wir mit λ_1^0 den kleinsten Eigenwert von $L_0(z)$; sodann setzen wir

$$L^*(z) = L(z) + (\lambda_1^0 - 1)z,$$
$$L_0{}^*(z) = L_0(z) + (\lambda_1^0 - 1)z.$$

Die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$L^*(z) + \lambda z = 0$$

sind offenbar

$$\lambda_h - \lambda_1^0 + 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots),$$

und diejenigen von

$$L_0{}^*(z) + \lambda z = 0$$

sind daher sämtlich $\geqq 1$; folglich läßt sich unsere bisherige Betrachtung auf den Differentialausdruck $L^*(z)$ anwenden und lehrt, daß allgemein $\lambda_h - \lambda_1^0 + 1$ und mithin auch λ_h sich in der Umgebung von μ_0 stetig mit μ ändert.

Da μ_0 willkürlich gewählt werden kann, so ist damit der Beweis des aufgestellten Satzes vollständig erbracht.

Endlich sei noch bemerkt, daß die eben entwickelte Theorie sich unmittelbar auf die Differentialgleichung

$$L(z) + \lambda q z = 0 \tag{63}$$

übertragen läßt, wenn q eine beliebige überall positive (oder negative) Funktion auf der Kugel bedeutet. Es ist nämlich leicht ersichtlich, daß der Differentialausdruck

$$L^*(z) = \frac{1}{\sqrt{q}} L\left(\frac{z}{\sqrt{q}}\right)$$

wiederum sich selbst adjungiert ist, und durch Einführung dieses Differentialausdruckes erhält die Differentialgleichung (63) die vorhin der Untersuchung zugrunde liegende Gestalt

$$L^*(z) + \lambda z = 0.$$

Wir führen die wesentlichen Sätze über die Differentialgleichung (63) hier kurz, wie folgt, an.

Satz 48. *Die Differentialgleichung* (63) *besitzt unendlichviele Eigenwerte* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ *von denen jedoch nur eine endliche Anzahl negativ ausfällt. Die zu diesen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen besitzen die Orthogonalitätseigenschaft*

$$\int q \varphi_h \varphi_l dk = 0 \qquad (h \neq l),$$
$$\int q \varphi_h^2 dk = 1.$$

Jede zweimal stetig differenzierbare Funktion f auf der Kugel läßt sich nach den zu jenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *auf Fouriersche Weise wie folgt*

$$f = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots \qquad \left(c_h = \int q f \varphi_h dk\right)$$

entwickeln.

Das Minimum des Dirichletschen Integrals $D(z)$ bei den Nebenbedingungen

$$\int q z^2 dk = 1,$$
$$\int q \varphi_1 z dk = 0, \quad \ldots, \quad \int q \varphi_{h-1} z dk = 0$$

ist λ_h; dasselbe wird für $z = \varphi_h$ angenommen.

Hängen die Koeffizienten in $L(z)$ von einem Parameter μ analytisch ab und denken wir uns für jeden Wert von μ die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ der Größe nach geordnet, so ist allgemein der h te Eigenwert λ_h eine stetige Funktion von μ.

Neunzehntes Kapitel.

Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche.

Der folgende Abschnitt enthält eine Neubegründung der Minkowskischen Theorie von Volumen und Oberfläche. Der Gedanke, die Kugel der gewöhnlichen Raumgeometrie als Ort der Punkte gleicher Entfernungen von einem festen Punkte durch eine beliebige konvexe Fläche, die sogenannte „Eichfläche," zu ersetzen, bildet die Grundlage der arithmetischen Untersuchungen Minkowkis.[1]) Die mehr geometrische Verfolgung dieses Gedankens hat ihn zu dem fundamentalen Begriffe des gemischten Volumens V_{123} von drei Körpern geführt[2]), und den Kernpunkt seiner Theorie von Volumen und Oberfläche bildet dann die Entdeckung der Ungleichung

$$V_{112}{}^2 \geqq V_{111}\,V_{122},$$

einer Ungleichung, welche lediglich quadratischen Charakter besitzt, während der Beweis derselben von Minkowski auf Grund einer kubischen Ungleichung geführt wird. Die nachfolgende neue Begründung der Minkowskischen Theorie geschieht mittels der im vorigen Abschnitt entwickelten Sätze über die lineare sich selbst adjungierte partielle Differentialgleichung auf der Kugel, und insbesondere der Nachweis jener quadratischen Ungleichung gelingt hierbei direkt auf Grund der Minimaleigenschaft des Dirichletschen Integrals. Insofern gerade allein die quadratische Ungleichung es ist, die sich eines direkten Beweises mittels der Theorie der linearen Differentialgleichungen fähig erweist — die kubische Ungleichung erscheint als leichte Folge der quadratischen —, scheint mir die Bedeutung der Minkowskischen Entdeckung durch den hier folgenden Beweis noch in helleres Licht gesetzt, und zugleich liefert diese Begründung der Minkowskischen Theorie von Volumen und Oberfläche ein glänzendes Beispiel für die Anwendung meiner Theorie der orthogonalen Integralgleichungen.

Im folgenden wollen wir allgemein unter einer homogenen Funktion ν ten Grades der Variabeln x, y, z eine solche Funktion $W(x, y, z)$ verstehen, die für alle positiven Werte von μ der Gleichung

$$W(\mu x, \mu y, \mu z) = \mu^\nu\, W(x, y, z)$$

---

1) Vgl. meinen Vortrag auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900, Nr. 4. Gött. Nachr. 1900.

2) Vgl. meine Gedächtnisrede auf Minkowski. Gött. Nachr. 1909, S. 16—17.

genügt. Ist insbesondere W eine homogene Funktion ersten Grades und werden wieder partielle Ableitungen durch Indizes bezeichnet, so gelten die Identitäten

(64) $$x W_x + y W_y + z W_z = W,$$

(65) $$\begin{cases} x W_{xx} + y W_{yx} + z W_{zx} = 0, \\ x W_{xy} + y W_{yy} + z W_{zy} = 0, \\ x W_{xz} + y W_{yz} + z W_{zz} = 0. \end{cases}$$

Aus den Identitäten (65) folgt leicht

$$\frac{W_{xx} W_{yy} - W_{xy}^2}{z^2} = \frac{W_{yy} W_{zz} - W_{yz}^2}{x^2},$$

und hieraus entnehmen wir, wenn V irgendeine andere homogene Funktion ersten Grades in x, y, z bedeutet, die weitere Identität

$$\frac{W_{xx} V_{yy} - 2 W_{xy} V_{xy} + W_{yy} V_{xx}}{z^2} = \frac{W_{yy} V_{zz} - 2 W_{yz} V_{yz} + W_{zz} V_{yy}}{x^2}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

(66) $$\begin{aligned} (W, V) &= \frac{W_{yy} V_{zz} - 2 W_{yz} V_{yz} + W_{zz} V_{yy}}{x^2} \\ &= \frac{W_{zz} V_{xx} - 2 W_{zx} V_{zx} + W_{xx} V_{zz}}{y^2} \\ &= \frac{W_{xx} V_{yy} - 2 W_{xy} V_{xy} + W_{yy} V_{xx}}{z^2}. \end{aligned}$$

Es sei nunmehr im XYZ-Raum ein konvexer Körper gegeben, der den Nullpunkt im Inneren enthält; wir bezeichnen die Entfernung des Nullpunktes von derjenigen Tangentialebene dieses Körpers, deren Normale die Richtungskosinus α, β, γ besitzt, mit $\mathsf{H}(\alpha, \beta, \gamma)$ und denken uns die so bestimmte Funktion H auf der Kugel mit dem Radius 1 ausgebreitet. Wir nehmen an, daß H eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion des Parameters auf der Kugeloberfläche sei. Die Gleichung jener Tangentialebene ist

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \mathsf{H}$$

oder, wenn wir

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$H(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, \mathsf{H}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

setzen,

$$xX + yY + zZ = H(x, y, z),$$

wo H eine homogene Funktion ersten Grades in x, y, z ist. Aus dieser Gleichung erhalten wir durch Differentiation nach x, y, z sofort die Koordinaten des Berührungspunktes der Tangentialebene als homogene Funktionen nullten Grades von x, y, z, wie folgt:

$$X = H_x,$$
$$Y = H_y,$$
$$Z = H_z;$$

diese Gleichungen liefern zugleich eine Parameterdarstellung der Oberfläche des Körpers.

Bezeichnen wir mit S ein ganz auf der oberen Hälfte $z > 0$ der Einheitskugel verlaufendes Gebiet und lassen wir in den Gleichungen

$$X = \mu H_x,$$
$$Y = \mu H_y,$$
$$Z = \mu H_z$$

den Faktor μ die Werte 0 bis 1 und x, y, z alle Punkte von S durchlaufen, so durchläuft der Punkt X, Y, Z denjenigen Raumteil Q, der durch einen gewissen Kegel mit der Spitze im Nullpunkte aus unserem konvexen Körper ausgeschnitten wird. Um das Volumen von Q zu berechnen, führen wir statt der Koordinaten X, Z, Y die Variabeln

$$\mu,\ s = \frac{x}{z},\quad t = \frac{y}{z}$$

ein und erhalten dann

$$V_Q = \iiint\limits_{(Q)} dX\,dY\,dZ = \iiint\limits_{\substack{(S)\\(\mu = 0, \ldots, 1)}} \Delta\, d\mu\, ds\, dt,$$

wo die Funktionaldeterminante den Wert

$$\Delta = \begin{vmatrix} H_x, & H_y, & H_z \\ \mu H_{xs}, & \mu H_{ys}, & \mu H_{zs} \\ \mu H_{xt}, & \mu H_{yt}, & \mu H_{zt} \end{vmatrix} = \mu^2 z^2 \begin{vmatrix} H_x, & H_y, & H_z \\ H_{xx}, & H_{yx}, & H_{zx} \\ H_{xy}, & H_{yy}, & H_{zy} \end{vmatrix}$$

besitzt. Multiplizieren wir nun in der letzten Determinante die Elemente der ersten Vertikalreihe mit $\frac{x}{z}$, die der zweiten mit $\frac{y}{z}$ und addieren sie dann zur dritten, so erhalten wir mit Rücksicht auf (64), (65), genommen für $W = H$,

$$\Delta = \mu^2 z H (H_{xx} H_{yy} - H_{xy}{}^2),$$

und demnach wird bei Ausführung der Integration nach μ

$$V_Q = \tfrac{1}{3} \iint\limits_{(S)} H (H_{xx} H_{yy} - H_{xy}{}^2) z\, ds\, dt.$$

Wie eine leichte Rechnung zeigt, ist für die Kugel bei Verwendung der Parameter s, t

(67) $$\sqrt{eg - f^2} = z^3,$$

und demnach drückt sich das Oberflächenelement dk der Einheitskugel durch die Koordinaten s, t wie folgt aus

$$dk = z^3\, ds\, dt;$$

wir erhalten daher schließlich

$$(68)\qquad \begin{aligned} V_Q &= \tfrac{1}{3}\int\limits_{(S)} H\,\frac{H_{xx}H_{yy}-H_{xy}^2}{z^2}\,dk \\ &= \tfrac{1}{6}\int\limits_{(S)} H(H,H)\,dk. \end{aligned}$$

Da nun (H, H), wie aus der Definition (66) hervorgeht, überall auf der Kugel wohl definiert ist, so läßt sich in (68) jetzt das Integral über die ganze Oberfläche der Einheitskugel ausdehnen, und wir erhalten das Gesamtvolumen unseres konvexen Körpers in der Gestalt

$$V = \tfrac{1}{6}\int H(H,H)\,dk.$$

Ist Ω eine willkürliche Funktion auf der Einheitskugel, so stellt

$$W(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\Omega(x,y,z)$$

eine willkürliche homogene Funktion ersten Grades von x, y, z dar. Nach (66) ist

$$\begin{aligned} (W,H) &= \frac{1}{x^2}\left(W_{yy}H_{zz} - 2\,W_{yz}H_{yz} + W_{zz}H_{yy}\right), \\ &= \frac{1}{y^2}\left(W_{zz}H_{xx} - 2\,W_{zx}H_{zx} + W_{xx}H_{zz}\right), \\ &= \frac{1}{z^2}\left(W_{xx}H_{yy} - 2\,W_{xy}H_{xy} + W_{yy}H_{xx}\right), \end{aligned}$$

und da hier der erste Ausdruck rechter Hand überall auf der Kugel für $x \neq 0$, der zweite für $y \neq 0$, der dritte für $z \neq 0$ definiert ist, so erkennen wir, daß

$$L(\Omega) = (W, H)$$

im Sinne der Festsetzung zu Beginn des vorigen Kapitels XVIII ein auf der Kugel regulärer linearer Differentialausdruck ist; derselbe ist durch die Funktion H eindeutig bestimmt. Es gilt ferner

Satz 49. *Der lineare Differentialausdruck $L(\Omega)$ auf der Kugel ist sich selbst adjungiert und von elliptischem Typus.*

Um die erstere Behauptung zu beweisen, denken wir uns wie vorhin auf einem Teilgebiet S der Kugel als krummlinige Koordinaten die Variabeln

$$s = \frac{x}{z}, \quad t = \frac{y}{z}$$

eingeführt und wollen dann den zu $L(\Omega)$ gehörigen Differentialausdruck $\mathfrak{L}(\Omega)$ in den Variabeln s, t aufstellen. Zu dem Zwecke bedenken wir, daß in unserem Ausdrucke (W, H) die Differentiationen nach x, y, z so zu verstehen sind, daß dabei x, y, z drei unabhängige Variabele sind. Nun gewinnen wir W, H aus den Ω, H, indem wir diese als Funktionen der krummlinigen Koordinaten s, t auf dem Teilgebiet S der Kugel auffassen, durch die Formeln

$$W(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\Omega$$
$$= z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega(s, t),$$
$$H(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathsf{H}$$
$$= z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}(s, t),$$

und da hiernach

$$W_{xx} = \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega(s, t)\right)_{ss},$$
$$W_{xy} = \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega(s, t)\right)_{st},$$
$$W_{yy} = \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega(s, t)\right)_{tt},$$
$$H_{xx} = \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}(s, t)\right)_{ss},$$
$$H_{xy} = \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}(s, t)\right)_{st},$$
$$H_{yy} = \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}(s, t)\right)_{tt}$$

wird, so gelangen wir schließlich mit Rücksicht auf (67) zu dem Ergebnis

$$(69)\qquad \mathfrak{L}(\Omega) = \sqrt{eg - f^2}\,L(\Omega) = z^3(W, H)$$
$$= \sqrt{1 + s^2 + t^2}\Big\{\left(\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega\right)_{ss}\left(\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}\right)_{tt}$$
$$- 2\left(\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega\right)_{st}\left(\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}\right)_{st}$$
$$+ \left(\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\Omega\right)_{tt}\left(\sqrt{1 + s^2 + t^2}\,\mathsf{H}\right)_{ss}\Big\}.$$

Nehmen wir in dem allgemeinsten linearen Differentialausdruck $\mathfrak{L}(z)$ (S. 220) — unter α irgendeine Funktion von s, t verstanden —

$$a = \alpha_{tt}, \quad b = -\alpha_{st}, \quad c = \alpha_{ss},$$
$$l = 0, \quad m = 0, \qquad n = 0,$$

so sind die Bedingungen dafür, daß $\mathfrak{L}(z)$ sich selbst adjungiert ist, nämlich die Gleichungen

$$l = a_s + b_t,$$
$$m = b_s + c_t,$$

erfüllt; demnach ist der Ausdruck

$$\alpha_{tt} z_{ss} - 2\alpha_{st} z_{st} + \alpha_{ss} z_{tt}$$

und folglich mit Rücksicht auf eine S. 241 gemachte Bemerkung auch der Ausdruck (69) sich selbst adjungiert; das gleiche gilt mithin nach unserer Festsetzung auch für den linearen Differentialausdruck $L(\Omega)$ auf der Kugel.

Um ferner den elliptischen Charakter des Differentialausdruckes $L(\Omega)$ zu erkennen, haben wir offenbar den Nachweis der Ungleichung

$$(70)\qquad H_{xx}H_{yy} - H_{xy}^2 > 0$$

nötig. Nach den Überlegungen, wie wir sie zu Anfang dieses Kapitels XIX (S. 243) angestellt haben, wurden die Tangentialebenen unseres konvexen Körpers durch die Gleichung

$$xX + yY + zZ = H(x, y, z)$$

dargestellt. Dividieren wir diese Gleichung durch z und führen dann

$$s = \frac{x}{z}, \quad t = \frac{y}{z}$$

ein, so erhält jene Gleichung die Gestalt

$$sX + tY + Z = H(s, t, 1),$$

und folglich wird

$$\begin{aligned} X &= H_s, \\ Y &= H_t, \\ Z &= H - sH_s - tH_t. \end{aligned}$$

Wie wir hieraus ersehen, ist der Übergang von der Darstellung der Oberfläche unseres Körpers durch Punktkoordinaten, wobei Z als Funktion der unabhängigen Variabeln X, Y betrachtet wird, zu der Darstellung durch Ebenenkoordinaten, wobei H als Funktion der unabhängigen Variabeln s, t betrachtet wird, nichts anderes als die in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen übliche Legendresche Transformation. Die Theorie der Legendreschen Transformation lehrt bekanntlich, daß zwischen den Ableitungen zweiter Ordnung die Gleichung

$$H_{ss}H_{tt} - H_{st}^2 = \frac{1}{Z_{XX}Z_{YY} - Z_{XY}^2}$$

gilt, und da wegen der Konvexität unserer Fläche der Nenner des Bruches rechter Hand positiv ausfällt, so folgt das gleiche für die linke Seite, und mithin gilt auch die Ungleichung (70).

Wir sind nunmehr in der Lage, die allgemeine Theorie des vorigen Kapitels XVIII auf den linearen Differentialausdruck $L(\Omega)$ anzuwenden. Was zunächst das Integrationsproblem betrifft (vgl. den allgemeinen S. 226—227 aufgestellten Satz 44), so bedarf es zu dessen Erledigung vor allem der Kenntnis der folgenden wichtigen Tatsache:

Satz 50. *Jede stetige Lösung der homogenen Differentialgleichung auf der Kugel*

(71) $$L(\Omega) = 0$$

ist eine lineare Kombination der drei Lösungen

$$\Omega = x, \quad \Omega = y, \quad \Omega = z.$$

Zum Beweise nehmen wir an, es sei ω eine stetige Funktion auf der Kugel, die der Differentialgleichung (71) genügt. Setzen wir sodann

$$w(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\omega\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

so wird w eine homogene Funktion ersten Grades von x, y, z, die der Gleichung

$$(w, H) = 0$$

und daher wegen (66) auch als Funktion der drei unabhängigen Variabeln x, y, z den Gleichungen

$$(72)\qquad \begin{cases} w_{yy}H_{zz} - 2w_{yz}H_{yz} + w_{zz}H_{yy} = 0, \\ w_{zz}H_{xx} - 2w_{zx}H_{zx} + w_{xx}H_{zz} = 0, \\ w_{xx}H_{yy} - 2w_{xy}H_{xy} + w_{yy}H_{xx} = 0 \end{cases}$$

genügt. Es sei jetzt x_1, y_1, z_1 eine Stelle auf der Einheitskugel, an der die Funktion w_x den kleinsten Wert auf der Kugel annimmt. Da w_x homogen vom nullten Grade ist, so wird dieser kleinste Wert k zugleich auch das Minimum der Funktion w_x im Raume für die drei unabhängigen Variabeln x, y, z. Wir setzen

$$\xi = x - x_1,$$
$$\eta = y - y_1,$$
$$\zeta = z - z_1$$

und entwickeln w_x in eine nach Potenzen von ξ, η, ζ fortschreitende Reihe wie folgt

$$(73)\qquad w_x = k + N(\xi, \eta, \zeta) + \cdots;$$

hier bezeichne N die in der Entwicklung vorkommenden Glieder niedrigster Dimension, und n sei der Grad dieses homogenen Ausdruckes N in ξ, η, ζ: dabei ist die Annahme gemacht, daß w_x nicht konstant sei. Da w_x an der Stelle $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ ein Minimum haben soll, so ist N notwendig eine definite Form: es gilt für alle ξ, η, ζ die Ungleichung

$$N(\xi, \eta, \zeta) \geqq 0.$$

Andererseits entwickeln wir auch w in eine nach Potenzen von ξ, η, ζ fortschreitende Reihe, wie folgt

$$(74)\qquad w = c + l(\xi, \eta, \zeta) + M(\xi, \eta, \zeta) + \cdots;$$

dabei bezeichne c eine Konstante, l die homogenen linearen Glieder und endlich M die nächst den linearen in der Entwicklung vorkommenden Glieder niedrigster Dimension; m sei der Grad dieses homogenen Ausdruckes M in ξ, η, ζ.

Wir bezeichnen nun die Werte der Ausdrücke

$$H_{xx},\ H_{yy},\ H_{zz},\ H_{yz},\ H_{zx},\ H_{xy}$$

für $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ d. h. $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ bzw. mit

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda,\ \mu,\ \nu;$$

dann ergibt sich, indem wir (74) in die beiden letzten Gleichungen (72) einführen, durch Berücksichtigung der Glieder niedrigster Dimension

$$(75)\quad \begin{cases} M_{\zeta\zeta}\alpha - 2M_{\zeta\xi}\mu + M_{\xi\xi}\gamma = 0, \\ M_{\xi\xi}\beta - 2M_{\xi\eta}\nu + M_{\eta\eta}\alpha = 0. \end{cases}$$

Es werde erstens angenommen, daß M ein Glied mit der Variabeln ξ enthält: alsdann lehrt der Vergleich von (73) mit (74), daß

$$N = M_{\xi}$$

wird, und daraus wiederum ersehen wir, indem wir (75) nach ξ differenzieren, daß auch N denselben Gleichungen

$$(76)\quad N_{\zeta\zeta}\alpha - 2N_{\zeta\xi}\mu + N_{\xi\xi}\gamma = 0,$$

$$(77)\quad N_{\xi\xi}\beta - 2N_{\xi\eta}\nu + N_{\eta\eta}\alpha = 0$$

genügt. Wir setzen nun

$$(78)\quad N = N_h\zeta^h + Z \qquad (0 \leqq h \leqq n),$$

wo N_h eine nicht identisch verschwindende Funktion vom $n-h$-ten Grade in ξ, η und Z eine Funktion von ξ, η, ζ ist, die den Faktor ζ^{h+1} enthält. Indem wir diesen Ausdruck für N in (77) einführen, erkennen wir, daß auch N_h der Gleichung (77) genügen muß.

Wegen der Konvexität der durch H dargestellten Fläche gelten für die Konstanten α, β, γ, μ, ν die Ungleichungen

$$\alpha\gamma - \mu^2 > 0,$$
$$\alpha\beta - \nu^2 > 0;$$

die letztere zeigt, daß jede nicht konstante Lösung der partiellen Differentialgleichung (77) notwendig eine indefinite Funktion d. h. eine solche Funktion von ξ, η ist, die sowohl positive wie negative Werte annimmt. Wenn aber N_h indefinit wäre, so wäre wegen (78) auch N gewiß bei genügend kleinen Werten von ζ sowohl positiver, wie negativer Werte fähig, was dem oben festgestellten definiten Charakter von N widerspricht. Demnach müßte N_h notwendig eine nicht verschwindende Konstante und zugleich

$$h = n, \quad N = N_n\zeta^n$$

sein. Die Einsetzung dieses Wertes für N in (76) lehrt aber, da $\alpha \neq 0$ ist, die Unmöglichkeit hiervon.

Es bleibt also noch die zweite Annahme zu untersuchen übrig, daß M nur von ξ, η abhängt. Die Einführung von $M_\xi = 0$ in (75) lehrt

$$M_{\zeta\zeta} = 0, \quad M_{\eta\eta} = 0$$

d. h.

$$(79)\quad M = C\eta\zeta,$$

wo C eine von Null verschiedene Konstante bedeutet. Nun genügt w als homogene Funktion ersten Grades in x, y, z der Identität

$$x w_x + y w_y + z w_z = w$$

d. h.

$$(x_1 + \xi) w_\xi + (y_1 + \eta) w_\eta + (z_1 + \zeta) w_\zeta = w$$

oder unter Berücksichtigung von (73), (74), (79)

$$(80) \quad (x_1 + \xi)(k + N + \cdots) + (y_1 + \eta)(l_\eta + C\zeta + \cdots) + (z_1 + \zeta)(l_\zeta + C\eta + \cdots) \\ = c + l + C\eta\zeta + \cdots.$$

Sammeln wir auf beiden Seiten dieser Identität die Glieder erster Ordnung in ξ, η, ζ, so ergibt sich

$$\xi k + y_1 C\zeta + \eta l_\eta + z_1 C\eta + \zeta l_\zeta = l,$$

und wegen

$$k = l_\xi, \quad \xi l_\xi + \eta l_\eta + \zeta l_\zeta = l$$

folgt

$$y_1 C\zeta + z_1 C\eta = 0,$$

d. h.

$$y_1 = 0, \quad z_1 = 0$$

und folglich

$$x_1 = \pm 1.$$

Durch Einführung dieser Werte verwandelt sich (80) in

$$(\pm 1 + \xi)(k + N + \cdots) + \eta(l_\eta + C\zeta + \cdots) + \zeta(l_\zeta + C\eta + \cdots) = c + l + C\eta\zeta + \cdots$$

und wenn wir hierin die Glieder zweiten Grades auf beiden Seiten sammeln, so wird, je nachdem der Grad n von N gleich 2 oder größer als 2 ausfällt, die Gleichung

$$\pm N + C\eta\zeta + C\eta\zeta = C\eta\zeta$$

oder die Gleichung

$$C\eta\zeta + C\eta\zeta = C\eta\zeta$$

erfüllt sein müssen. Die letztere Gleichung ist unmöglich; die erstere ergibt

$$N = \mp C\eta\zeta,$$

was dem definiten Charakter von N widerspricht.

Damit ist unsere ursprüngliche Annahme widerlegt: in der Entwicklung (73) darf ein Glied N nicht auftreten, d. h. w_x ist eine Konstante. Da in gleicher Weise auch w_y und w_z Konstanten sein müssen, so folgt, daß w nichts anderes als eine lineare Kombination der drei Funktionen x, y, z ist.

Aus dem eben Bewiesenen folgt auf Grund des in Kapitel XVIII (S. 226—227) aufgestellten Satzes 44:

Satz 51. *Die inhomogene Differentialgleichung auf der Kugel*

$$L(\Omega) = f,$$

ist dann und nur dann lösbar, wenn die gegebene Funktion f auf der Kugel die drei Integralbedingungen

$$\int fx\,dk = 0,$$
$$\int fy\,dk = 0,$$
$$\int fz\,dk = 0$$

erfüllt.

Nehmen wir in $L(\Omega)$ insbesondere

$$H = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

so wird

$$L(\Omega) = (W, R) = \frac{1}{z^2}\{(1 - y^2) W_{xx} + 2xy\, W_{xy} + (1 - x^2) W_{yy}\} \quad (z \neq 0);$$

da, wie eine einfache Rechnung lehrt, der Ausdruck rechts hier nichts anderes als die Summe der beiden Hauptkrümmungsradien der durch W gegebenen Fläche darstellt, so geht in diesem Falle unser allgemeiner Satz in einen bekannten von A. Hurwitz[1]) aufgestellten und mittelst der Theorie der Kugelfunktionen bewiesenen Satz über.

Dem obigen Ausdruck V (S. 245) für das Volumen eines konvexen Körpers stellt Minkowski einen allgemeineren für das gemischte Volumen von drei konvexen Körpern zur Seite: sind H_1, H_2, H_3 die diese Körper bestimmenden homogenen Funktionen ersten Grades, so definiert Minkowski das gemischte Volumen dreier Körper durch das über die ganze Einheitskugel zu erstreckende Integral

$$V(H_1, H_2, H_3) = V_{123} = \tfrac{1}{6}\int H_1(H_2, H_3)\,dk.$$

Setzen wir in Formel (15)

$$w = H_1, \quad z = H_2$$

und berücksichtigen, daß unser Differentialausdruck

$$L(\Omega) = (W, H_3)$$

sich selbst adjungiert ist, so zeigt dieselbe unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung

$$\int H_1(H_2, H_3)\,dk = \int H_2(H_1, H_3)\,dk$$

d. h. es ist

$$V_{123} = V_{213},$$

und da offenbar auch

$$V_{123} = V_{132}$$

wird, so findet sich damit der Minkowskische Satz bestätigt, *daß das gemischte Volumen dreier Körper bei den Permutationen derselben seinen Wert beibehält.*

---

1) Vgl. Ann. Ec. Norm. Sup. 19 (1902), S. 404.

Da überall auf der Kugel

$$\mathsf{H} > 0, \quad (H, H) > 0$$

ausfällt, so ist auch $\frac{(H, H)}{\mathsf{H}}$ eine durchweg positive Funktion, und daher läßt sich unsere Theorie der partiellen Differentialgleichung auf der Kugel, wie sie in dem zum Schlusse des Kapitels XVIII S. 241—242 ausgesprochenen Satze 48 gipfelt, auf die Differentialgleichung

$$(81) \qquad L(\Omega) + \lambda \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} \Omega = 0$$

anwenden. Aus jenem allgemeinen Satze entnehmen wir unmittelbar, daß diese Gleichung nur endlichviele negative, dagegen unendlichviele positive Eigenwerte hat. Nach dem vorhin Bewiesenen wissen wir ferner, daß $\lambda = 0$ ein dreifacher Eigenwert ist. Außerdem sehen wir, daß $\lambda = -1$ jedenfalls ein Eigenwert jener Differentialgleichung und $\Omega = \mathsf{H}$ eine zugehörige Eigenfunktion ist. Wir wollen nunmehr zeigen, daß $\lambda = -1$ nur ein einfacher Eigenwert ist und außer ihm keine weiteren negativen Eigenwerte vorhanden sind. Zu dem Zwecke führen wir in (81)

$$H = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ein; wegen

$$(R, R) = 2$$

erhalten wir so die speziellere Differentialgleichung

$$(82) \qquad L_0(\Omega) + 2\lambda\Omega = 0,$$

wo

$$(83) \quad L_0(\Omega) = (W, R) = \frac{1}{z^2}\{(1 - y^2) W_{xx} + 2xy W_{xy} + (1 - x^2) W_{yy}\} \quad (z \neq 0)$$

ist.

Diese Differentialgleichung ist mit der Differentialgleichung der Kugelfunktionen identisch. Bezeichnet nämlich V eine homogene Funktion h-ten Grades, die der Potentialgleichung

$$(84) \qquad V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$$

genügt, und setzen wir

$$V = R^{h-1} W,$$

so wird

$$V_{xx} = R^{h-1} W_{xx} + 2(h-1) x R^{h-3} W_x + \{(h-1) R^{h-3} + (h-1)(h-3) x^2 R^{h-5}\} W.$$

Addieren wir hierzu die entsprechenden Ausdrücke für V_{yy}, V_{zz} und berücksichtigen dann die Identitäten (64), (65) — entsprechend dem Umstande, daß W eine homogene Funktion ersten Grades ist —, so erhalten wir auf der Kugel wegen $R = 1$ die Gleichung

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} + (h-1)(h+2) W.$$

Nun ist wegen (65) für $R = 1$

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = \frac{1}{z^2}\{(1 - y^2)\, W_{xx} + 2xy\, W_{xy} + (1 - x^2)\, W_{yy}\},$$

und mithin geht wegen (83) die Potentialgleichung (84) über in die Differentialgleichung

$$(W, R) + (h - 1)(h + 2)\, W = 0,$$

oder wenn

$$W = R\Omega$$

gesetzt wird, in

$$L_0(\Omega) + (h - 1)(h + 2)\,\Omega = 0.$$

Die Theorie der Kugelfunktionen lehrt, daß diese Gleichung keine anderen auf der Kugel stetigen Lösungen zuläßt als eben jene aus den homogenen Potentialen von den Graden

$$h = 0, 1, 2, \ldots$$

entspringenden Funktionen Ω, und da die Potentialgleichung (84) genau $2h + 1$ solche Lösungen h-ten Grades besitzt, so folgt, daß die Differentialgleichung (82) allgemein für $h = 0, 1, 2, \ldots$ die Größe

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(h - 1)(h + 2)$$

als $2h + 1$ fachen Eigenwert besitzt. Für $h = 0$ erhalten wir $\lambda = -1$, für $h = 1$ ergibt sich $\lambda = 0$ als dreifacher Eigenwert, womit sich das vorhin für die allgemeine Differentialgleichung (81) gefundene Resultat bestätigt. Darüber hinaus aber erkennen wir die wichtige Tatsache, daß die spezielle Differentialgleichung (82) den Eigenwert $\lambda = -1$ als einfachen Eigenwert besitzt, und daß, von diesem Werte und $\lambda = 0$ abgesehen, alle übrigen Eigenwerte positiv ausfallen, daß insbesondere der kleinste positive Eigenwert $\lambda = 2$ (für $h = 2$) wird.

Es ist nun leicht vermöge des Satzes 47 über die stetige Änderung der Eigenwerte bei stetiger Änderung eines Parameters in der Differentialgleichung (S. 238) die eben gefundene Tatsache auf die allgemeine Differentialgleichung (81) zu übertragen.

Wegen (70) hat die in t quadratische Gleichung

$$H_{xx}t^2 + 2H_{xy}t + H_{yy} = 0$$

keine reelle Wurzel, und da das gleiche von der quadratischen Gleichung

$$R_{xx}t^2 + 2R_{xy}t + R_{yy} = 0$$

gilt, so besitzt auch die Gleichung

$$(\mu H_{xx} + (1 - \mu)R_{xx})t^2 + 2(\mu H_{xy} + (1 - \mu)R_{xy})t + \mu H_{yy} + (1 - \mu)R_{yy} = 0,$$

wo μ einen reellen auf das Intervall

(85) $$0 \leqq \mu \leqq 1$$

beschränkten Parameter bedeutet, keine reelle Wurzel t, und demnach ist

$$(\mu H_{xx} + (1-\mu) R_{xx})(\mu H_{yy} + (1-\mu) R_{yy}) - (\mu H_{xy} + (1-\mu) R_{xy})^2 > 0;$$

d. h. die sämtlichen durch die Funktionenschar

$$H_\mu = \mu H + (1-\mu) R$$

dargestellten Flächen sind konvex; mithin gelten die vorhin für $L(\Omega)$ entwickelten Tatsachen auch für den Differentialausdruck

$$L_\mu(\Omega) = (W, H_\mu)$$

und für die Differentialgleichung

$$L_\mu(\Omega) + \lambda \frac{(H_\mu, H_\mu)}{H_\mu} \Omega = 0. \tag{86}$$

Die Differentialgleichung (86) geht für $\mu = 0$ in (82), für $\mu = 1$ in (81) über. Die Differentialgleichung (82) besitzt, wie wir sahen, vom kleinsten an der Größe nach geordnet, die folgenden Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = 2.$$

Die Heranziehung des vorhin genannten Satzes über die stetige Änderung der Eigenwerte (S. 238) und die Berücksichtigung des Umstandes, daß $\lambda = 0$ für alle Werte des Parameters μ genau ein dreifacher Eigenwert sein muß, zeigt, daß, während μ das Intervall (85) durchläuft, der fünfte Eigenwert stets positiv bleiben muß, insbesondere auch für $\mu = 1$. Wir fassen die gefundenen Resultate, wie folgt, zusammen:

Satz 52. *Die partielle Differentialgleichung* (81) *auf der Kugel besitzt* $\lambda = -1$ *als einfachen Eigenwert: die zugehörige Eigenfunktion ist* $\Omega = \mathsf{H}$; *ferner ist für sie* $\lambda = 0$ *ein dreifacher Eigenwert: die zugehörigen Eigenfunktionen auf der Kugel sind* x, y, z; *die übrigen Eigenwerte sind positiv. Das System der Eigenfunktionen von* (81)

$$\Omega_1 = \mathsf{H}, \quad \Omega_2 = x, \quad \Omega_3 = y, \quad \Omega_4 = z, \quad \Omega_5, \quad \Omega_6, \quad \ldots$$

bildet ein System von Funktionen, welches für $\mathsf{H} = 1$ *in das System der Kugelfunktionen übergeht und als die Verallgemeinerung des letzteren anzusehen ist, wenn man im Sinne der Minkowskischen Geometrie die Kugel durch eine beliebige konvexe Fläche ersetzt. Denkt man* $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$, *wie üblich, orthogonal normiert, so ist jede willkürliche zweimal stetig differenzierbare Funktion f auf der Kugel nach jenen Eigenfunktionen auf Fouriersche Weise entwickelbar wie folgt:*

$$f = c_1 \Omega_1 + c_2 \Omega_2 + c_3 \Omega_3 + \cdots, \quad c_h = \int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} f \Omega_h \, dk.$$

Nunmehr sind wir imstande, diejenige fundamentale quadratische Ungleichung zwischen den gemischten Volumina zweier Körper abzuleiten, die bereits in der Einleitung zu diesem Abschnitte erwähnt worden ist; dieselbe wird uns als Ausfluß der Tatsache erscheinen, daß der fünfte

Eigenwert λ_5 der Differentialgleichung (81) positiv ausfällt. In der Tat, zufolge des am Schlusse des Abschnittes XVIII aufgestellten allgemeinen Satzes ist λ_5 das Minimum des Dirichletschen Integrales

$$D(\Omega) = -\int H(W, W)dk$$

bei den Nebenbedingungen

$$\int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} \Omega^2 dk = 1, \tag{87}$$

$$\int (H, H) \Omega dk = 0, \tag{88}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} x \Omega dk = 0, \\ &\int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} y \Omega dk = 0, \\ &\int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} z \Omega dk = 0. \end{aligned} \right. \tag{89}$$

Es sei nun G eine beliebige homogene Funktion ersten Grades, die auf der Kugel, für Ω eingesetzt, der Bedingung (88) genügt. Die durch G bestimmte Funktion auf der Kugel bezeichnen wir mit Γ. Wir wählen dann die drei Konstanten a, b, c derart, daß die Funktion

$$\Omega = \Gamma + ax + by + cz \tag{90}$$

auf der Kugel die drei Bedingungen (89) erfüllt. Dies ist gewiß möglich, da im entgegengesetzten Falle solche Konstante a, b, c, die nicht sämtlich Null sind, existieren müßten, daß die lineare Verbindung $ax + by + cz$ für Ω eingesetzt die drei Bedingungen (89) erfüllt; dann aber wäre als Folge davon, wie man sofort sieht, auch

$$\int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} (ax + by + cz)^2 dk = 0,$$

und dies ist nicht der Fall, da der Integrand positiv ausfällt.

Wegen

$$\int (H, H)(ax + by + cz)dk = \int H(H, ax + by + cz)dk = 0$$

erfüllt die in (90) dargestellte Funktion Ω auch die Bedingung (88). Ist nun die Funktion Ω nicht identisch für alle Punkte der Kugel Null, — was nur möglich ist, wenn G einer linearen Kombination von x, y, z gleich wird — so können wir sie mit einer Konstanten derart multipliziert denken, daß auch die Bedingung (87) erfüllt wird. Wegen $\lambda_5 > 0$ folgt alsdann $D(\Omega) > 0$. Da aber

$$\begin{aligned} D(\Omega) &= -\int H(G + ax + by + cz,\ G + ax + by + cz)dk \\ &= -\int H(G, G)dk \end{aligned}$$

wird, so gelangen wir zu dem Ergebnis: es gilt stets die Ungleichung

$$(91) \qquad \int H(G, G)\,dk \leqq 0,$$

wenn G eine beliebige homogene Funktion ersten Grades bedeutet, für die

$$\int G(H, H)\,dk = 0$$

ausfällt, und dabei gilt in jener Ungleichung (91) das Gleichheitszeichen nur, wenn G eine lineare Verbindung der drei Funktionen x, y, z ist.

Aus dieser Tatsache entnehmen wir, indem wir $G = H - F$ setzen, unmittelbar das weitere Ergebnis: es gilt stets die Ungleichung

$$(92) \qquad \int H(H, H)\,dk \geqq \int H(F, F)\,dk,$$

wenn F eine beliebige homogene Funktion ersten Grades bedeutet, für die

$$\int H(H, H)\,dk = \int F(H, H)\,dk$$

ausfällt, und dabei gilt in jener Ungleichung (92) das Gleichheitszeichen nur, wenn drei Konstanten a, b, c existieren, derart daß

$$(93) \qquad F = H + ax + by + cz$$

wird.

Die Formeln für die Punktkoordinaten X, Y, Z der Fläche, wie sie zu Anfang dieses Abschnittes S. 244 aufgestellt worden sind, lehren, daß, wenn zwei zu konvexen Körpern gehörige Funktionen F, H durch eine Relation der Gestalt (93) mit einander verbunden sind, der eine Körper durch eine bloße Parallelverschiebung aus dem anderen Körper hervorgegangen ist. Verstehen wir daher unter F eine zu einem konvexen Körper gehörige homogene Funktion ersten Grades, wie es H ist, so spricht sich das vorhin gefundene Resultat auch wie folgt aus: Wenn für zwei konvexe Körper, die durch H, F bestimmt sind,

$$(94) \qquad V(H, H, H) = V(H, H, F)$$

ist, so gilt stets die Ungleichung

$$(95) \qquad V(H, H, H) \geqq V(H, F, F),$$

und hier hat das Gleichheitszeichen nur statt, wenn der eine Körper durch eine bloße Parallelverschiebung aus dem anderen Körper hervorgegangen ist.

Nunmehr seien irgend zwei konvexe Körper vorgelegt; die zu ihnen gehörigen Funktionen seien H, G. Wegen $G > 0$ ist die Konstante

$$V(H, H, G) = \tfrac{1}{6}\int G(H, H)\,dk$$

positiv und folglich auch die Funktion

$$F = \frac{V(H, H, H)}{V(H, H, G)}\, G.$$

Der durch F definierte Körper geht aus dem durch G definierten Körper, wie man sieht, durch eine Ähnlichkeitstransformation hervor. Da außer-

dem F offenbar die Bedingung (94) erfüllt, so folgt aus dem Vorigen die Gültigkeit der Ungleichung (95), d. h., es ist

$$V(H, H, H) \geqq \left(\frac{V(H, H, H)}{V(H, H, G)}\right)^2 V(H, G, G)$$

oder

(96) $$V(H, H, G)^2 \geqq V(H, H, H)\, V(H, G, G).$$

Es gilt mithin der folgende Satz, der den Kernpunkt der Minkowskischen Theorie von Volumen und Oberfläche ausmacht.

Für zwei konvexe Körper besteht stets die quadratische Ungleichung (96), *wobei das Gleichheitszeichen nur dann statt hat, wenn der eine Körper aus dem anderen durch Parallelverschiebung und Ähnlichkeitstransformation hervorgeht.*

Durch Vertauschung der beiden Körper folgt aus (96) die Ungleichung

(97) $$V(H, G, G)^2 \geqq V(G, G, G)\, V(H, H, G).$$

Durch Quadrieren von (96) und Multiplikation mit (97) folgt nach Forthebung des positiven Faktors $V(H, G, G)^2\, V(H, H, G)$ die Ungleichung

(98) $$V(H, H, G)^3 \geqq V(H, H, H)^2\, V(G, G, G);$$

d. h. es gilt der Satz:

Für zwei konvexe Körper besteht stets die kubische Ungleichung (98), *wobei das Gleichheitszeichen nur dann statt hat, wenn der eine Körper aus dem anderen durch Parallelverschiebung und Ähnlichkeitstransformation hervorgeht.*

Ist wie früher

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

so stellt $H + \varepsilon R$ eine Parallelfläche zu dem durch H definierten Körper im Abstande ε dar. Da nun offenbar die Oberfläche O des durch H definierten Körpers

$$O = \underset{\varepsilon = 0}{L} \frac{V(H + \varepsilon R, H + \varepsilon R, H + \varepsilon R) - V(H, H, H)}{\varepsilon}$$

wird, so erhalten wir

$$O = 3\, V(H, H, R) = \tfrac{1}{2} \int (H, H)\, dk.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} V(H, R, R) &= \tfrac{1}{6} \int H dk \\ &= \tfrac{1}{6} \int (R, H)\, dk \\ &= \tfrac{1}{6} \int (\varrho_1 + \varrho_2)\, dk \\ &= \tfrac{1}{6} \int \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) d\omega, \end{aligned}$$

wenn ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien der durch H definierten Fläche und $d\omega$ deren Oberflächenelement bedeutet; wir setzen

$$M = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)d\omega$$

und bezeichnen dieses Integral als das Integral der mittleren Krümmung und des konvexen Körpers.

Nehmen wir in den Ungleichungen (96), (97), (98) $G = R$ und nennen V das Volumen des Körpers, so erhalten wir

$$(99) \quad \begin{cases} O^2 \geqq 3\,VM, \\ M^2 \geqq 4\pi\,O, \end{cases}$$

$$(100) \quad O^3 \geqq 36\pi\,V^2,$$

und in diesen Ungleichungen gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn der konvexe Körper aus der Einheitskugel durch Parallelverschiebung und Ähnlichkeitstransformation hervorgegangen ist, d. h. wenn er selbst eine Kugel ist. Hiernach drücken die Ungleichungen (99), (100) gewisse leicht zu formulierende charakteristische Minimaleigenschaften der Kugel aus. Die Minkowskischen Ungleichungen (96), (98) sind hiernach Verallgemeinerungen solcher Eigenschaften, wie sie in einer Minkowskischen Geometrie gelten, wo statt der Kugel eine beliebige konvexe Fläche als Eichfläche genommen ist.

Zwanzigstes Kapitel.

Anwendung auf ein Problem der Theorie der automorphen Funktionen.

In diesem Abschnitte will ich kurz an einem speziellen Beispiele zeigen, wie die orthogonalen Integralgleichungen auch in der Theorie der automorphen Funktionen erfolgreiche Anwendung finden können.

Die nächstliegende Verallgemeinerung der elliptischen Modulfunktion ist die einfachste automorphe Funktion mit reellen Substitutionen, die vier gegebene reelle Werte ∞, a, b, c ausläßt. Die Aufgabe, diese zu konstruieren, führt zu der allgemeineren, in der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den vier singulären Stellen ∞, a, b, c

$$(101) \quad \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dy}{dx}\right) + (x+\lambda)\,y = 0, \quad \left\{\begin{matrix} p = (x-a)(x-b)(x-c) \\ a < b < c \end{matrix}\right\}$$

den Parameter λ so zu bestimmen, daß der Quotient zweier partikulärer Lösungen bei den Umläufen der komplexen Variabeln x um die singulären Punkte stets Substitutionen mit reellen Koeffizienten erfährt.

Wir konstruieren nun diejenigen Potenzreihen, die bzw. nach Potenzen von $x-a$, $x-b$, $x-c$ fortschreiten, für $x=a$, $x=b$, $x=c$ den Wert 1 annehmen und in der Umgebung dieser Stellen reguläre analytische

Lösungen der Differentialgleichung (101) darstellen. Diese Potenzreihen sind, wie die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung lehrt, durch jene Forderungen eindeutig bestimmt; sie mögen bzw. mit y_a, y_b, y_c bezeichnet werden. Die anderen Lösungen der Differentialgleichungen sind dann in der Umgebung jener Stellen $x = a$, $x = b$, $x = c$ bzw. in der Gestalt

$$\begin{aligned} &Ay_a \log(x-a) + \mathfrak{P}_a(x-a), \\ &By_b \log(x-b) + \mathfrak{P}_b(x-b), \\ &Cy_c \log(x-c) + \mathfrak{P}_c(x-c), \end{aligned}$$

darstellbar, wo A, B, C Konstante sind und $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{P}_b$, $\mathfrak{P}_c$ Potenzreihen mit reellen Koeffizienten bedeuten. Hieraus folgt, daß insbesondere die Lösung y_a, wenn wir x von a bis b zunehmen lassen, in der Nähe von b für $x < b$ die Darstellung

(102) $$y_a = \beta y_b \log(b-x) + \mathfrak{Q}(x-b)$$

gestattet, wo β eine bestimmte Konstante, $\mathfrak{Q}$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten bedeutet und der Logarithmus reell zu nehmen ist. Nunmehr setzen wir die Lösung y_a reell über den Punkt b hinaus in der Weise fort, daß wir für $x > b$ unter y_a diejenige Lösung verstehen, die in der Nähe des Punktes b durch die Formel

$$y_a = \beta y_b \log(x-b) + \mathfrak{Q}(x-b)$$

gegeben ist. Sodann stellen wir die Frage, ob der Parameter λ in der Differentialgleichung (101) sich so bestimmen läßt, daß für denselben die in Rede stehende Lösung y_a, wenn x von b aus in den Punkt c hineinwandert, dort endlich bleibt d. h. bis auf einen konstanten Faktor mit y_c übereinstimmt.

Ehe wir diese Frage untersuchen, wollen wir ihre Bedeutung für das vorhin gestellte, die reellen Substitutionen betreffende Problem feststellen. Zu dem Zwecke nehmen wir an, es sei $\lambda = \lambda_1$ ein Parameterwert, für den die Lösung y_a die obengenannte Eigenschaft besitzt; diese Lösung y_a die wir nunmehr kurz mit y bezeichnen wollen, hat dann die folgenden Eigenschaften: sie ist eine reelle stetige Funktion innerhalb des Intervalles

$$a \leqq x \leqq c$$

einschließlich der Grenzen, mit Ausnahme des Punktes $x = b$, in dessen Nähe sie sich in der Gestalt

(103) $$y = \beta y_b \log|x-b| + \mathfrak{Q}_b(x-b)$$

darstellen läßt. Hierbei ist die Konstante β gewiß nicht Null. Denn in diesem Falle wäre y als Funktion der komplexen Variabeln x in den Punkten a, b, c regulär analytisch und könnte daher auch nicht im Unendlichfernen logarithmisch singulär sein; mit Rücksicht hierauf ergibt

sich aber aus der Differentialgleichung, daß für y im Unendlichfernen die Entwicklung

$$y = \frac{C}{x} + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (C \neq 0)$$

gilt, d. h. y hätte den unendlichfernen Punkt zur Nullstelle und wäre demnach überall gleich der Konstanten Null, was nicht angeht.

Neben dieser Lösung y betrachten wir nun die bei $x = b$ reguläre Lösung y_b, die nach dem eben Bewiesenen gewiß von Cy, wo C eine Konstante ist, verschieden ausfällt; lassen wir x von b nach a wandern, so wird in der Umgebung von $x = a$

(104) $$y_b = \alpha y \log(x-a) + \mathfrak{Q}_a(x-a) \qquad (x > a),$$

wenn andererseits x auf den Punkt c zu geht, haben wir

$$y_b = \gamma^* y_c \log(c-x) + \mathfrak{Q}_c(x-c) \qquad (x < c),$$

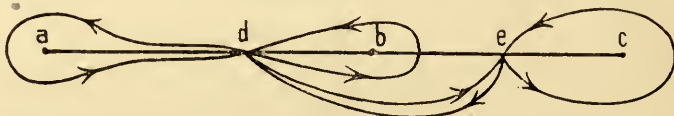
oder da y_c bis auf eine Konstante mit y übereinstimmen muß,

$$y_b = \gamma y \log(c-x) + \mathfrak{Q}_c(x-c).$$

Nunmehr untersuchen wir den Quotienten

$$\eta(x) = \frac{y}{i y_b}$$

an einer zwischen a und b gelegenen Stelle d als Funktion der komplexen



Variabeln x: es zeigt sich dann, daß die analytische Funktion $\eta(x)$ beim Umlauf der Variabeln x um eine jede der Stellen a, b, c stets eine lineare Substitution mit reellen Koeffizienten erfährt. In der Tat, bezeichnen wir mit S_a das Ergebnis des Umlaufes um den Punkt a, so wird

$$S_a y = y;$$

überdies ist wegen (104)

$$S_a y_b = y_b + 2 i \pi \alpha y$$

und folglich

$$S_a \eta = \frac{\eta}{1 - 2\pi\alpha\eta}.$$

Bezeichnet ferner S_b das Ergebnis des Umlaufes um den Punkt b, so wird wegen (102)

$$S_b y = y + 2 i \pi \beta y_b;$$

überdies ist

$$S_b y_b = y_b$$

und folglich

$$S_b \eta = \eta + 2\pi\beta.$$

Nun lassen wir y von d aus einen Halbumlauf in positivem Sinne um b machen bis zu einem zwischen b und c gelegenen Punkte e, dann einen

vollen Umlauf in positivem Sinne um c und alsdann einen Halbumlauf in negativem Sinne um b zum Punkte d zurück: dabei verwandelt sich der Reihe nach y in

$$\begin{aligned} & y + i\pi\beta y_b, \\ & y + i\pi\beta(y_b + 2i\pi\gamma y) = (1 - 2\pi^2\beta\gamma)y + i\pi\beta y_b, \\ & (1 - 2\pi^2\beta\gamma)(y - i\pi\beta y_b) + i\pi\beta y_b, \\ = & (1 - 2\pi^2\beta\gamma)y + 2i\pi^3\beta^2\gamma y_b. \end{aligned}$$

Bei derselben Wanderung der Variabeln x wird aus y_b der Reihe nach

$$\begin{aligned} & y_b, \\ & y_b + 2i\pi\gamma y, \\ & y_b + 2i\pi\gamma(y - i\pi\beta y_b) = 2i\pi\gamma y + (1 + 2\pi^2\beta\gamma)y_b, \end{aligned}$$

und folglich wird, wenn wir mit S_c das Ergebnis des Umlaufes um c bezeichnen:

$$S_c\eta = \frac{(1 - 2\pi^2\beta\gamma)\eta + 2\pi^3\beta^2\gamma}{-2\pi\gamma\eta + (1 + 2\pi^2\beta\gamma)}.$$

Wie wir sehen, haben die sämtlichen drei Substitutionen S_a, S_b, S_c reelle Koeffizienten, und wir können auch leicht schließen, daß umgekehrt dieser Umstand, wonach der Quotient zweier Partikularlösungen der Differentialgleichung (101) beim Umlauf der Variabeln um die singulären Stellen Substitutionen mit reellen Koeffizienten erfährt, nur dann eintritt, wenn eine Lösung von den Eigenschaften wie y — Endlichkeit in a, c und logarithmisches Verhalten gemäß (103) in b — vorhanden ist.

Um nun die Frage nach der Existenz der Funktion y in Angriff zu nehmen, beweisen wir zunächst, daß es gewisse Werte von λ gibt, für die die Lösung y_a der Differentialgleichung (101) nach ihrer reellen Fortsetzung gemäß (103) über b hinaus im Punkte c endlich bleibt. Wir beweisen erstens, daß dieses Verhalten gewiß nicht für jeden Wert von λ stattfindet. In der Tat, nehmen wir dies an und bestimmen wir alsdann einen Wert von λ, für den y_a im Punkte b endlich bleibt — nach den Darlegungen des zweiten Abschnittes S. 55 am Beispiel der Kugelfunktion gibt es solcher Werte λ notwendig unendlich viele — so würde für einen Wert von λ die Lösung y_a in allen Punkten a, b, c endlich sein, was nach dem vorhin Bewiesenen nicht zutreffen kann.

Es sei $\lambda = \varkappa$ ($> -c$) ein Wert von der Art, daß y_a, über b hinaus gemäß (103) fortgesetzt, in c nicht endlich bleibt: dann bleibt auch y_c, über b hinaus gemäß (103) fortgesetzt, nicht endlich. Aus dem Umstande, daß y_a, y_c Lösungen der Differentialgleichung

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dy}{dx}\right) + (x + \varkappa)y = 0$$

sind, folgt leicht die Konstanz des Ausdruckes

$$N = p\left(y_a \frac{dy_c}{dx} - y_c \frac{dy_a}{dx}\right)$$

im ganzen Intervall a bis c. Da aber als Folge unserer Annahme über $\varkappa$ der Quotient $\frac{y_a}{y_c}$ nicht konstant ist, so fällt die Konstante N von Null verschieden aus. Setzen wir nun

$$G(x, \xi) = \frac{1}{N} y_a(x) y_c(\xi) \qquad (x \leqq \xi),$$

$$= \frac{1}{N} y_a(\xi) y_c(x) \qquad (x \geqq \xi),$$

so wird

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{dG}{dx}\right]_{x=\xi+\varepsilon} - \underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{dG}{dx}\right]_{x=\xi-\varepsilon} = \frac{-1}{p(\xi)},$$

und folglich ist $G(x, \xi)$ die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(y)$, wenn man als Randbedingungen das Endlichbleiben in a und c und reelle Fortsetzung über b hinweg gemäß (103) verlangt.

Nehmen wir $G(x, \xi)$ als Kern einer Integralgleichung zweiter Art, so führt die Anwendung meiner Theorie der orthogonalen Integralgleichungen zu dem Satze:

Satz 53. *Es gibt unendlich viele Werte λ (die Eigenwerte des Problems), so daß die Differentialgleichung* (101) *eine Lösung (die zugehörige Eigenfunktion) besitzt, die bei reeller Fortsetzung über den Punkt b hinweg in den Punkten a und c endlich bleibt; für eben diese Werte λ ist der Quotient zweier Lösungen der Differentialgleichung eine analytische Funktion, die beim Umlauf der Variabeln x um die singulären Stellen der Differentialgleichung Substitutionen mit reellen Koeffizienten erfährt.*

Die Kennzeichnung der unendlichvielen Eigenfunktionen durch Oszillationseigenschaften, sowie den Zusammenhang mit dem Problem der konformen Abbildung der nullwinkligen Kreisbogenvierecke mit Orthogonalkreis hat F. Klein[1]) untersucht.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Eine zweiparametrige Randwertaufgabe (Kleins Oszillationstheorem).

Bei allen bisherigen Anwendungen der Theorie der orthogonalen und polaren Integralgleichungen handelte es sich um Randwertaufgaben für gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen, wobei jedesmal ein Parameter λ, sei es in der Differentialgleichung selbst, sei es in der Randbedingung als zu bestimmende Größe auftrat. Im folgenden möchte ich

1) Math. Ann. Bd. 64 (1907), S. 175.

an einem Beispiel zeigen, wie auch im Falle zweier zu bestimmender Parameter λ, μ die Theorie sich als anwendbar erweist.

Es seien für y als Funktion von x und für η als Funktion von ξ zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorgelegt von der Gestalt

(105) $$\frac{d\left(p\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + (\lambda a + \mu b)y = 0 \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2);$$

(106) $$\frac{d\left(\pi\frac{d\eta}{d\xi}\right)}{d\xi} - (\lambda \alpha + \mu\beta)\eta = 0 \qquad (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2),$$

worin p, a, b Funktionen der unabhängigen Variabeln x und π, α, β Funktionen der unabhängigen Variabeln ξ bedeuten; diese Funktionen mögen sämtlich der Kürze halber als regulär analytisch angenommen werden, und die Funktionen p, a; π, α mögen überdies die Bedingungen erfüllen:

(107) $$p(x) > 0, \quad a(x) > 0 \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2),$$

(108) $$\pi(\xi) > 0, \quad \alpha(\xi) > 0 \qquad (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2).$$

Alsdann multiplizieren wir die Differentialgleichung (105) mit $\alpha\eta$ und (106) mit ay; durch Addition erhalten wir für die Funktion

$$z(x, \xi) = y(x)\eta(\xi)$$

die partielle Differentialgleichung

(109) $$\alpha(pz_x)_x + a(\pi z_\xi)_\xi + \mu(\alpha b - a\beta)z = 0;$$

dieselbe ist wegen (107), (108) von elliptischem Typus und überdies, wie man leicht erkennt, sich selbst adjungiert. Da das zu dem Differentialausdruck

(110) $$\alpha(pz_x)_x + a(\pi z_\xi)_\xi$$

gehörige Dirichletsche Integral

$$\int_{x_1}^{x_1}\int_{\xi_1}^{\xi_2}(\alpha p z_x^2 + a\pi z_\xi^2)dx\,d\xi$$

nur positiver Werte fähig ist, so besitzt auch die Greensche Funktion zu (110) definiten Charakter. Endlich ist

$$\alpha b - a\beta = 0$$

nur für eine endliche Anzahl analytischer Kurven erfüllt — es sei denn, daß

(111) $$b(x) = Ca(x), \quad \beta(\xi) = C\alpha(\xi)$$

ausfällt, wo C eine geeignete Konstante bedeutet; dieser Fall (111) ist aber auszuschließen, da ja alsdann die beiden ursprünglichen Differentialgleichungen (105), (106) nur die eine Verbindung $\lambda + C\mu$ der beiden Parameter enthielten.

Wie diese Überlegungen zeigen, erfüllt die partielle Differentialgleichung (109), in der der lineare Parameter μ auftritt, alle Voraussetzungen für die Gültigkeit des Satzes, den ich in Kap. XXI, S. 206 ausgesprochen habe. Diesem Satze zufolge besitzt die partielle Differentialgleichung (109) für unendlich viele Werte des Parameters μ, die Eigenwerte, $\mu_1, \mu_2, \ldots$ Lösungen, die zugehörigen Eigenfunktionen z_1, $z_2, \ldots$, deren jede innerhalb des durch die Ungleichungen

$$(112) \qquad \begin{aligned} x_1 &\leqq x \leqq x_2, \\ \xi_1 &\leqq \xi \leqq \xi_2 \end{aligned}$$

bestimmten Rechteckes stetig ist und auf den Seiten dieses Rechteckes verschwindet; nach diesen Eigenfunktionen ist die Entwicklung einer willkürlichen (gewissen Voraussetzungen unterworfenen) Funktion in diesem Rechteck auf die Fouriersche Weise möglich.

Ich betrachte nun die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(113) \qquad \frac{d\left(p\,\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} + \mu_h b y + \lambda a y = 0,$$

die aus (105) entsteht, wenn darin für μ der besondere Eigenwert μ_h von (109) eingesetzt wird. Da hierin $p(x)$ und $a(x)$ nach der Voraussetzung (107) positive Funktionen sind, so folgt auf Grund meiner Theorie der orthogonalen Integralgleichungen, daß (113) unendlich viele positive Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen

$$(114) \qquad \begin{aligned} \lambda \;\; &= \lambda_1^h, \qquad \lambda_2^h, \ldots \\ y(x) &= y_1^{(h)}(x), \quad y_2^{(h)}(x), \ldots \end{aligned}$$

besitzt, wenn wir als Randbedingung das Verschwinden für $x = x_1$ und $x = x_2$ nehmen. Entwickeln wir insbesondere die zu μ_h gehörige Eigenfunktion z_h der partiellen Differentialgleichung (109), indem wir sie als Funktion von x betrachten, auf Fouriersche Weise nach den Funktionen $y_1^{(h)}, y_2^{(h)}, \ldots$, so ergibt sich

$$(115) \qquad z_h(x, \xi) = \eta_1^{(h)}(\xi) y_1^{(h)}(x) + \eta_2^{(h)}(\xi) y_2^{(h)}(x) + \cdots,$$

wo allgemein

$$(116) \qquad \eta_m^{(h)}(\xi) = \int_{x_2}^{x_1} a(x) z_h(x, \xi) y_m^{(k)}(x)\, dx$$

ist.

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$L^{(h)}(y) \equiv \frac{d\left(p\,\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} - \mu_h b y,$$

$$\Lambda^{(h)}(\eta) \equiv \frac{d\left(\pi\,\dfrac{d\eta}{d\xi}\right)}{d\xi} - \mu_h \beta \eta;$$

dann ist die linke Seite der partiellen Differentialgleichung (109), genommen für $\mu = \mu_h$, identisch mit dem Ausdrucke

$$\alpha L^{(h)}(z) + a\Lambda^{(h)}(z);$$

da z_h eine Lösung von (109) ist, so haben wir

$$\alpha L^{(h)}(z_h) + a\Lambda^{(h)}(z_h) = 0$$

und, wenn wir mit $y_m^{(h)}$ multiplizieren und zwischen den Grenzen x_1 und x_2 nach x integrieren

$$\int_{x_1}^{x_2} \alpha L^{(h)}(z_h) y_m^{(h)} dx + \int_{x_1}^{x_2} a\Lambda^{(h)}(z_h) y_m^{(h)} dx = 0.$$

Wenden wir hier auf das erste Integral die Greensche Formel an und führen wir sodann mittelst (116) die Funktion $\eta_m^{(h)}$ der Variabeln ξ ein, so erhalten wir

$$\alpha \int_{x_1}^{x_2} L^{(h)}(y_m^{(h)}) z_h dx + \Lambda^{(h)}\left(\int_{x_1}^{x_2} a z_h y_m^{(h)} dx\right) = 0$$

oder, indem wir berücksichtigen, daß

(117) $$L^{(h)}(y_m^{h}) + \lambda_m a y_m^{(h)} = 0$$

wird, und alsdann vermittelst (116) die Funktion $\eta_m^{(h)}$ der Variabeln ξ einführen,

(118) $$\Lambda^{(h)}(\eta^{(h)}) + \alpha\lambda_m \eta_m^{(h)} = 0.$$

Da wegen (116) $\eta_m^{(h)}(\xi)$ eine für $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$ verschwindende Funktion ist, so wird das Produkt

$$\eta_m^{(h)}(\xi)\, y_m^{(h)}(x)$$

eine auf den Kanten unseres Rechteckes (112) in der $x - \xi$-Ebene verschwindende Funktion; dieselbe genügt, wie aus (117), (118) unmittelbar folgt, der partiellen Differentialgleichung (109) für $\mu = \mu_h$. Andererseits besitzt diese Differentialgleichung gewiß nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen, nämlich die zu μ_h gehörigen Eigenfunktionen; mithin dürfen unter den Funktionen zweier Variabeln x, ξ

$$\eta_1^{(h)} y_1^{(h)},\ \eta_2^{(h)} y_2^{(h)},\ \ldots$$

gewiß nur eine endliche Anzahl linear voneinander unabhängiger Funktionen vorkommen. Da aber unter den Funktionen der Variabeln x

$$y_1^{(h)},\ y_2^{(h)},\ \ldots$$

gewiß keine lineare Abhängigkeit statt hat, so folgt, daß nur eine endliche Anzahl von Funktionen der Variabeln ξ in der Reihe

$$\eta_1^{(h)},\ \eta_2^{(h)},\ \ldots$$

von Null verschieden ist, und die Gleichung (115) zeigt mithin, daß eine

jede zu λ_h gehörige Eigenfunktion z_h der partiellen Differentialgleichung (109) sich durch eine endliche Summe von Produkten der Gestalt

$$\eta^{(h)}(\xi)y^{(h)}(x)$$

darstellen läßt, wo jedes einzelne Produkt ebenfalls eine zu μ_h gehörige Eigenfunktion jener partiellen Differentialgleichung (113) ist. Wir denken uns nun in solcher Weise alle zu μ_h gehörigen Eigenfunktionen von (109) durch Produkte dargestellt und alsdann aus den sämtlichen auftretenden Produkten solche ausgewählt, die voneinander linear unabhängig sind und durch die die übrigen Produkte sich linear ausdrücken lassen; die so ausgewählten Produkte bilden nach dem eben Bewiesenen offenbar ein volles System von Eigenfunktionen der partiellen Differentialgleichung (109) für den Eigenwert μ_h.

Die wesentlichsten der bisher gefundenen Resultate fassen wir wie folgt zusammen:

Satz 54. *Ist ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen von der Gestalt* (105), (106) *vorgelegt, für die die Bedingungen* (107), (108) *erfüllt sind, und treten in denselben die zwei Parameter λ, μ nicht bloß in der Verbindung $\lambda + C\mu$ auf — unter C eine Konstante verstanden, — so existieren unendlichviele Paare von Werten λ, μ, für welche die Differentialgleichungen solche simultane Lösungen $y_h(x)$, $\eta_h(\xi)$ haben, daß $y_h(x)$ an den Enden und nicht überall im Inneren des Intervalles $x_1 x_2$ und ebenso $\eta_h(\xi)$ an den Enden und nicht überall im Innern des Intervalles $\xi_1 \xi_2$ verschwindet. Eine willkürliche (gewissen Voraussetzungen unterworfene) Funktion der Variabeln x, ξ ist in Fourierscher Weise in eine nach den Produkten $y_h(x)\eta_h(\xi)$ fortschreitende Reihe entwickelbar.*

Ist noch die Bedingung erfüllt, daß die Funktion $\alpha b - a\beta$ innerhalb und auf dem Rande des Rechteckes nirgends verschwindet, so bedarf es zur Behandlung der partiellen Differentialgleichung (109) nur der Theorie der orthogonalen Integralgleichungen, und es ergibt sich dann, daß jede zweimal stetig differenzierbare Funktion der Variabeln x, ξ in Fourierscher Weise nach den Produkten der Lösungen der simultanen Differentialgleichungen (105), (106) entwickelbar ist.

Wir betrachten zum Schluß als Beispiel die Lamésche Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-e_1} + \frac{1}{t-e_2} + \frac{1}{t-e_3}\right)\frac{dy}{dt} - \frac{At+B}{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}\, y = 0.$$

Wie die Anwendung unseres Theorems zeigt, lassen sich hierin die Parameter A, B auf unendlichviele Weisen so bestimmen, daß die Differentialgleichung eine Lösung y besitzt, die an den Endpunkten eines gegebenen Intervalles $t_1 t_2$ verschwindet und zugleich eine solche, die an den End-

punkten eines anderen Intervalles $\tau_1 \tau_2$ verschwindet — ein Resultat, welches, wie wir sehen, im engsten Zusammenhange mit der Aussage des Kleinschen Oszillationstheorems steht. — Dabei sind die Intervalle $t_1 t_2$ und $\tau_1 \tau_2$ nur der Einschränkung unterworfen, daß sie einander ausschließen und keinen der Punkte e_1, e_2, e_3 enthalten; dagegen ist es für die Gültigkeit meines Theorems nicht nötig anzunehmen, daß die Intervalle durch einen der Punkte e_1, e_2, e_3 getrennt sind. Um dies einzusehen, nehmen wir etwa

$$e_1 < e_2 < e_3 < t_1 < t_2 < \tau_1 < \tau_2$$

an, wählen dann einen zwischen t_2 und τ_1 gelegenen Punkt a und setzen einmal

$$t = a - x \quad (x_1 = a - t_2, \quad x_2 = a - t_1)$$

und andererseits

$$t = a + \xi \quad (\xi_1 = \tau_1 - a, \quad \xi_2 = \tau_2 - a).$$

Nehmen wir endlich

$$\lambda = A, \quad \mu = aA + B,$$

so entstehen aus der Laméschen Gleichung die folgenden:

$$\frac{d\left(p\,\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \frac{\lambda x - \mu}{4p}\, y = 0, \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2)$$

$$\frac{dp\,\frac{d\eta}{d\xi}}{d\xi} - \frac{\lambda \xi + \mu}{4\pi}\, \eta = 0, \qquad (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2)$$

wo

$$p = \sqrt{(a - x - e_1)(a - x - e_2)(a - x - e_3)},$$

$$\pi = \sqrt{(a + \xi - e_1)(a + \xi - e_2)(a + \xi - e_3)}$$

gesetzt ist. Da x und ξ in ihren Intervallen $x_1 x_2$ bzw. $\xi_1 \xi_2$ stets positiv bleiben, so sind die Bedingungen unseres Theorems erfüllt und damit die Existenz unendlich vieler Parameterpaare A, B von der verlangten Beschaffenheit erwiesen.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Begründung der kinetischen Gastheorie.

In allen bisher erörterten Anwendungen der Theorie der Integralgleichungen — sei es auf analytische oder geometrische Probleme oder im Gebiete der theoretischen Physik — war es stets eine gewöhnliche oder partielle Differentialgleichung oder ein System von solchen Differentialgleichungen, das uns bei der Aufstellung der Integralgleichung zur Ver-

mittelung diente. Im folgenden mache ich eine neue direkte Anwendung der Theorie der linearen Integralgleichungen, indem ich zeige, daß es eine gewisse lineare Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern ist, die die mathematische Grundlage der kinetischen Gastheorie bildet und ohne deren Erforschung nach den modernen Methoden der Integralgleichungstheorie eine systematische Begründung der Gastheorie unmöglich ist.

Wir führen zunächst folgende Bezeichnungen und Annahmen ein. Es seien x, y, z die rechtwinkligen Raumkoordinaten und t die Zeit; ξ, η, ζ seien die Geschwindigkeitskomponenten der Moleküle; die Moleküle seien Kugeln vom Durchmesser σ. Zur Abkürzung werde ferner das Volumenelement im xyz-Raume mit

$$do = dx\,dy\,dz$$

und das Volumenelement in $\xi\eta\zeta$-Raume mit

$$d\omega = d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

bezeichnet. Den gesamten Zustand des Gases sehen wir als gegeben an durch die Funktion F der sieben Argumente ξ, η, ζ, x, y, z, t, wobei die Bedeutung dieser Funktion die ist, daß

$$F\,do\,d\omega$$

die Anzahl der Moleküle angibt, deren Mittelpunktskoordinaten zur Zeit t bzw.

$$\begin{array}{llll} \text{zwischen} & x & \text{und} & x + dx \\ \text{„} & y & \text{„} & y + dy \\ \text{„} & z & \text{„} & z + dz \end{array}$$

und deren Geschwindigkeitskomponenten zugleich bzw.

$$\begin{array}{llll} \text{zwischen} & \xi & \text{und} & \xi + d\xi \\ \text{„} & \eta & \text{„} & \eta + d\eta \\ \text{„} & \zeta & \text{„} & \zeta + d\zeta \end{array}$$

liegen oder kurz, die zur Zeit t in do und deren Geschwindigkeitspunkte ξ, η, ζ in $d\omega$ fallen. Wir nennen diese Funktion F die Maxwellsche Fundamentalfunktion.

Es seien ferner $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Koordinaten eines Punktes der Einheitskugel

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 1 \tag{1}$$

und $d\mathfrak{S}$ das Oberflächenelement dieser Einheitskugel. Bringen wir nun zwei Moleküle mit den Geschwindigkeiten ξ, η, ζ und ξ_1, η_1, ζ_1 zum Zusammenstoß derart, daß im Moment ihrer Berührung die Richtungskosinusse ihrer Zentrilinie $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind, so werden die Geschwindigkeiten der beiden Moleküle nach dem Zusammenstoß durch die Formeln gegeben:

The direction of the line of centers is from the (ξ_1, η_1, ζ_1) to the (ξ, η, ζ) mol.

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + \mathfrak{x} W, \\ \eta' &= \eta + \mathfrak{y} W, \\ \zeta' &= \zeta + \mathfrak{z} W, \end{aligned} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_1 - \mathfrak{x} W, \\ \eta_1' &= \eta_1 - \mathfrak{y} W, \\ \zeta_1' &= \zeta_1 - \mathfrak{z} W, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei zur Abkürzung

$$W = \mathfrak{x}(\xi_1 - \xi) + \mathfrak{y}(\eta_1 - \eta) + \mathfrak{z}(\zeta_1 - \zeta)$$

gesetzt ist. Diese Formeln (2), (3) stellen eine lineare homogene Transformation der sechs Variabeln $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ dar, die folgende Eigenschaft besitzt:

Satz 1. Die Transformation ist mit ihrer inversen identisch; ihre Determinante ist gleich 1.

Satz 2. Vertauscht man in einem Ausdrucke, welcher $\xi', \eta', \zeta', \xi_1', \eta_1', \zeta_1'$ enthält, die Größen ξ, η, ζ bzw. mit ξ_1, η_1, ζ_1 und umgekehrt, so vertauschen sich in jenem Ausdrucke gegenseitig ξ', η', ζ' bzw. mit $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$.

Satz 3. Unsere Transformation besitzt die vier Invarianten

$$\begin{aligned} &\xi + \xi_1, \\ &\eta + \eta_1, \\ &\zeta + \zeta_1, \\ &\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \end{aligned}$$

während W bei ihrer Anwendung das Vorzeichen ändert.

Auch setzen wir noch fest, daß, wenn $(\xi\eta\zeta)$ irgend einen Ausdruck in ξ, η, ζ bedeutet, stets die folgenden abkürzenden Bezeichnungen gelten sollen:

$$\begin{aligned} (\xi\eta\zeta)_1 &= (\xi_1\eta_1\zeta_1), \\ (\xi\eta\zeta)' &= (\xi'\eta'\zeta'), \\ (\xi\eta\zeta)_1' &= (\xi_1'\eta_1'\zeta_1'); \end{aligned}$$

und endlich definieren wir die Klammersymbole:

$$[F, G] = \tfrac{1}{4}\sigma^2 |W| (F'G_1' + F_1'G' - FG_1 - F_1 G)$$

$$[F, F] = \tfrac{1}{2}\sigma^2 |W| (F'F_1' - FF_1)$$

$$[F] = X\frac{\partial F}{\partial \xi} + Y\frac{\partial F}{\partial \eta} + Z\frac{\partial F}{\partial \zeta} + \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} + \zeta\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t};$$

in letzterer Formel bedeuten rechts die Größen X, Y, Z die Komponenten der äußeren auf das Gas wirkenden Kraft, bezogen auf die Masseneinheit; sie sind gegebene Funktionen von x, y, z, t.

Nunmehr lege ich meiner Untersuchung die Maxwell-Boltzmannsche Fundamentalformel

$$\iint [F, F]\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = [F] \tag{4}$$

zugrunde; darin ist links die Integration $d\omega_1$ über den gesamten Geschwindigkeitsraum

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1 = -\infty \text{ bis } +\infty$$

und die Integration $d\mathfrak{s}$ über die gesamte Oberfläche der Einheitskugel (1) zu erstrecken. Diese Gleichung (4) muß identisch für alle $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t$ erfüllt sein: sie stellt eine notwendige Bedingung dafür dar, daß die Funktion F der sieben Argumente $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t$ die Maxwellsche Fundamentalfunktion unseres einatomigen Gases ist.

Hierzu fügen wir für F noch folgende Bedingungen hinzu:

1. F darf keinenfalls negative Werte annehmen.

2. F muß verschwinden, sobald eines der Argumente ξ, η, ζ positiv oder negativ unendlich wird.

3. F soll für alle Zeiten t endlich und stetig bleiben.

Die Bedingungen 1. und 2. ergeben sich unmittelbar aus der Bedeutung von F; die Bedingung 3. ist der Ausdruck für die Stabilität des Bewegungszustandes unseres Gases.

Um F auf die allgemeinste Weise als Lösung der Gleichung (4) zu bestimmen, könnte der Ansatz dienen:

$$F = F_0 + F_1(t - t_0) + F_2(t - t_0)^2 + \cdots. \tag{5}$$

Da $\frac{\partial F}{\partial t}$ in (4) nur rechter Hand auftritt, so folgen, wenn F_0 eine willkürlich gewählte Funktion von $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$ ist, aus (4) offenbar in eindeutiger Weise die weiteren Koeffizienten $F_1, F_2, \ldots$ als Funktionen ebendieser sechs Argumente. Durch Abschätzung dieser Koeffizienten werden wir jedoch eine Konvergenz der Potenzreihe (5) nur dann erwarten dürfen, wenn $t - t_0$ absolut genügend klein ausfällt, und solche Lösungen würden der obigen Stabilitätsbedingung 3. widersprechen. Daher verwerfen wir die Entwicklung (5) und erzielen vielmehr die Auflösung dadurch, daß wir einen positiven Parameter λ mittels des Ansatzes

$$F = \frac{G}{\lambda}$$

in die Gleichung (4) einführen und die so entstehende Gleichung

$$\iint (G, G)\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \lambda[G] \tag{6}$$

vermöge der nach Potenzen von λ fortschreitenden Reihe

$$G = \Phi + \Psi\lambda + X\lambda^2 + \cdots \tag{7}$$

lösen — was darauf hinausläuft, in der ursprünglichen Gleichung (4)

$$F = \frac{\Phi}{\lambda} + \Psi + X\lambda + \cdots \tag{8}$$

einzusetzen; dabei bedeuten $\Phi, \Psi, X, \ldots$ zu bestimmende Funktionen der sieben Argumente $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t$, von denen jedenfalls die erste Φ noch

den obigen Bedingungen 1., 2., 3. zu genügen hat. In dem Potenzreihenansatze (8) erblicke ich die strenge Formulierung des Maxwellschen Gedankens einer sukzessiven Approximation zur Berechnung seiner Fundamentalfunktion F: in der Tat sollen späterhin beim systematischen Aufbau der Gastheorie sukzessive die Abschnitte

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\Phi}{\lambda}, \\ \frac{\Phi}{\lambda} + \Psi, \\ \frac{\Phi}{\lambda} + \Psi + X\lambda, \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{9}$$

in erster, zweiter, dritter Annäherung usw. als Ersatz an Stelle der Fundamentalfunktion F genommen werden. Die Potenzreihe (8), die die Fundamentalgleichung (4) befriedigt, ist der allgemeinste Ausdruck für die Maxwellsche Fundamentalfunktion eines in stabilem Bewegungszustand befindlichen Gases.

Unsere wichtigste allgemeine Aufgabe besteht darin, die Mannigfaltigkeit aller derjenigen Lösungen der Fundamentalgleichung (4) zu ermitteln, die durch die Potenzreihenentwicklung (8) dargestellt werden.

Zu dem Zwecke tragen wir (7) in (6) ein; dann finden wir durch Vergleichung der Koeffizienten der Potenzen von λ auf beiden Seiten

$$\iint [\Phi, \Phi]\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = 0, \tag{10}$$

$$\iint [\Phi, \Psi]\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{2}[\Phi], \tag{11}$$

$$\iint ([\Phi, X] + \tfrac{1}{2}[\Psi, \Psi])\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{2}[\Psi], \tag{12}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Gleichung (10) ist bereits von Boltzmann vollständig gelöst worden, wie folgt. Wegen Satz 1. und Satz 2. auf S. 269 haben wir, wenn H ebenso wie F und G Funktionen der Argumente ξ, η, ζ bedeuten:

$$\begin{aligned} \iiint H[F, G]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} &= \iiint H_1 [F, G]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} \\ = -\iiint H'[F, G]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} &= -\iiint H_1' [F, G]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s}, \end{aligned}$$

und daher wird

$$\iiint H[F, G]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{4}\iiint (H + H_1 - H' - H_1')[F, G]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s}. \tag{13}$$

Aus dieser Formel folgt für

$$\begin{aligned} H &= \log \Phi, \\ F &= \Phi, \\ G &= \Phi, \end{aligned}$$

mit Rücksicht auf (10)

$$\tfrac{1}{4}\iiint(\log\Phi+\log\Phi_1-\log\Phi'-\log\Phi_1')\,[\Phi,\Phi]\,d\omega\,d\omega_1\,d\mathfrak{s}=0$$

oder

$$\iiint|W|\log\frac{\Phi\Phi_1}{\Phi'\Phi_1'}\;(\Phi'\Phi_1'-\Phi\Phi_1)\,d\omega\,d\omega_1\,d\mathfrak{s}=0$$

d. h., da der Integrand hier nirgends positiv ausfallen kann,

$$\Phi'\Phi_1'-\Phi\Phi_1=0.$$

Die allgemeinste dieser Gleichung genügende Funktion von ξ, η, ζ, x, z, y, t mit den Eigenschaften 1. und 2. auf S. 270 ist, wie aus dem Satze 3. auf S. 269 leicht erkannt wird:

$$\Phi=a e^{-b\{(\xi-u)^2+(\eta-v)^2+(\zeta-w)^2\}}, \tag{14}$$

wenn u, v, w beliebige Funktionen von x, y, z, t und a, b solche Funktionen derselben Variabeln x, y, z, t bedeuten, die nirgends negativ ausfallen.

Nunmehr haben wir den soeben aus (10) gefundenen Ausdruck (14) für Φ in (11) einzutragen und aus der so entstehenden Gleichung die Funktion Ψ zu ermitteln. Setzen wir zu dem Zwecke

$$\Psi=\psi\Phi,$$

wo ψ eine neue zu bestimmende Funktion ist, und berücksichtigen die obige Relation

$$\Phi\Phi_1=\Phi'\Phi_1',$$

so nimmt (11) die Gestalt an

$$\tfrac{1}{4}\sigma^2\iint|W|\,\Phi\Phi_1(\psi_1'+\psi'-\psi_1-\psi)\,d\omega_1\,d\mathfrak{s}=\tfrac{1}{2}[\Phi]. \tag{15}$$

Führen wir hier in dem Ausdrucke linker Hand an Stelle von

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\quad \xi_1,\quad \eta_1,\quad \zeta_1$$

bzw. die Argumente

$$u+\frac{\xi}{\sqrt{b}},\quad v+\frac{\eta}{\sqrt{b}},\quad w+\frac{\zeta}{\sqrt{b}},\quad u+\frac{\xi_1}{\sqrt{b}},\quad v+\frac{\eta_1}{\sqrt{b}},\quad w+\frac{\zeta_1}{\sqrt{b}}$$

ein, so geht derselbe über in

$$-\tfrac{1}{4}\sigma^2\frac{a^2}{b^2}J,$$

wo zur Abkürzung

$$J=\iint|W|\,e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}(\varphi+\varphi_1-\varphi'-\varphi_1')\,d\omega_1\,d\mathfrak{s} \tag{16}$$

gesetzt worden ist; darin hat φ die Bedeutung

$$\varphi(\xi\eta\zeta)=\psi\left(u+\frac{\xi}{\sqrt{b}},\,v+\frac{\eta}{\sqrt{b}},\,w+\frac{\zeta}{\sqrt{b}}\right).$$

Es ist nun für die Begründung der kinetischen Gastheorie von entscheidender Bedeutung, daß der Ausdruck (16) in die Gestalt

$$J=k\varphi+\int K(\xi\eta\zeta;\,\xi_1\eta_1\zeta_1)\,\varphi_1\,d\omega_1 \tag{17}$$

gebracht werden kann und daß sich daher die zur Bestimmung von ψ dienende Gleichung (15) als eine lineare (orthogonale) Integralgleichung zweiter Art herausstellt.

Um dies zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß

$$\int |W|\, d\mathfrak{S} = 2\pi \sqrt{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}$$

wird, und setzen

$$\begin{aligned} k(\xi\eta\zeta) &= e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} \iint |W|\, e^{-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}\, d\omega_1\, d\mathfrak{S} \\ &= 2\pi e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} \int \sqrt{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}\, e^{-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}\, d\omega_1, \end{aligned} \tag{18}$$

so daß k eine gewisse nur von $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ abhängige stets positive Funktion bedeutet:

Ferner führe ich in dem Integralausdrucke

$$J^* = \iint |W|\, e^{-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}\, \varphi'\, d\omega_1\, d\mathfrak{S}$$

statt des Integrales über die Oberfläche der Einheitskugel ein solches über das Innere derselben ein, indem ich in

$$J^* = 3\int_0^1 J^* r^2\, dr$$

statt r und der Richtungskosinusse die drei unabhängigen rechtwinkligen Koordinaten nehme $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$. Wegen

$$r^2\, dr\, d\mathfrak{S} = d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z}$$

wird dann

$$J^* = 3 \underset{(0 \leqq \mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2 \leqq 1)}{\iiiint} \left| \frac{\mathfrak{x}(\xi_1-\xi)+\mathfrak{y}(\eta_1-\eta)+\mathfrak{z}(\zeta_1-\zeta)}{\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2}} \right| e^{-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)} \varphi'\, d\omega_1\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z},$$

wo nunmehr

$$\varphi' = \varphi(\xi'\eta'\zeta') = \varphi\left(\xi + \frac{\mathfrak{x}W}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2},\ \eta + \frac{\mathfrak{y}W}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2},\ \zeta + \frac{\mathfrak{z}W}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2}\right)$$

zu nehmen ist. Führen wir jetzt im Integral J^* statt ξ_1, η_1, ζ_1 die neuen Integrationsvariablen

$$\lambda_1 = \frac{\xi_1-\xi}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2},$$

$$\mu_1 = \frac{\eta_1-\eta}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2},$$

$$\nu_1 = \frac{\zeta_1-\zeta}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2}$$

ein, so erhalten wir

$$J^* = 3 \underset{(0 \leqq \mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2 \leqq 1)}{\iiiiiint} |\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1|\, (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^{\frac{7}{2}}$$
$$e^{-\{(\lambda_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\xi)^2+(\mu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\eta)^2+(\nu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\zeta)^2\}}\, \varphi'\, d\lambda_1\, d\mu_1\, d\nu_1\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z},$$

wo

$$\varphi' = \varphi(\xi + \mathfrak{x}(\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1),\ \eta + \mathfrak{y}(\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1),\ \zeta + \mathfrak{z}(\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1))$$

zu nehmen ist. Sodann wählen wir statt $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die neuen Integrationsvariablen

$$\lambda = \mathfrak{x}(\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1),$$
$$\mu = \mathfrak{y}(\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1),$$
$$\nu = \mathfrak{z}(\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1);$$

wegen

$$\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1 = (\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1)^2,$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)$$

und da die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} 2\mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1, & \mathfrak{x}\mu_1, & \mathfrak{x}\nu_1 \\ \mathfrak{y}\lambda_1, & \mathfrak{x}\lambda_1 + 2\mathfrak{y}\mu_1 + \mathfrak{z}\nu_1, & \mathfrak{y}\nu_1 \\ \mathfrak{z}\lambda_1, & \mathfrak{z}\mu_1, & \mathfrak{x}\lambda_1 + \mathfrak{y}\mu_1 + 2\mathfrak{z}\nu_1 \end{vmatrix} = 2(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)^{\frac{3}{2}}$$

wird, erhalten wir mit Rücksicht darauf, daß zu jedem Wertsystem λ, μ, ν zwei Wertsysteme $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ gehören:

$$J^* = 3 \underset{(0 \leqq \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \leqq \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)}{\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int} \frac{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)^{\frac{7}{2}}}{(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)^{\frac{9}{2}}} \tag{19}$$
$$e^{-\left\{\left(\lambda_1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1} + \xi\right)^2 + \left(\mu_1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1} + \eta\right)^2 + \left(\nu_1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1} + \zeta\right)^2\right\}}$$
$$\varphi(\xi + \lambda, \eta + \mu, \zeta + \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, d\lambda_1\, d\mu_1\, d\nu_1.$$

Um hierin die Integration nach λ_1, μ_1, ν_1 auszuführen, bedenken wir, daß das Integral

$$\underset{0 \leqq \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \leqq \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)}{\int\!\!\int\!\!\int} \frac{1}{(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1)^{\frac{9}{2}}} \tag{20}$$
$$e^{-\left\{\left(\lambda_1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1} + \xi\right)^2 + \left(\mu_1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1} + \eta\right)^2 + \left(\nu_1 \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1} + \zeta\right)^2\right\}} d\lambda_1\, d\mu_1\, d\nu_1$$

eine Orthogonalinvariante der beiden Variabelnreihen

$$\lambda, \mu, \nu \text{ und } \xi, \eta, \zeta$$

ist und folglich nur eine Funktion der drei Ausdrücke

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2, \quad \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

werden kann. Um diese Funktion zu ermitteln, nehmen wir $\mu = 0$, $\nu = 0$. Für $\lambda > 0$ geht jenes Integral (20) dann über in:

$$\int_{\lambda}^{+\infty}\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda\lambda_1)^{\frac{9}{2}}} e^{-\left\{(\lambda + \xi)^2 + \left(\frac{\lambda\mu_1}{\lambda_1} + \eta\right)^2 + \left(\frac{\lambda\nu_1}{\lambda_1} + \zeta\right)^2\right\}} d\lambda_1\, d\mu_1\, d\nu_1$$
$$= \frac{\pi}{\lambda^{\frac{13}{2}}} e^{-(\lambda + \xi)^2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1^{\frac{5}{2}}} = \frac{2\pi}{3\lambda^8} e^{-(\lambda + \xi)^2},$$

und mithin wird das Integral (20) notwendigerweise gleich

$$\frac{2\pi}{3(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)^4}\, e^{-\frac{\{\lambda(\lambda+\xi)+\mu(\mu+\eta)+\nu(\nu+\zeta)\}^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}},$$

da ja dieser Ausdruck für $\mu = 0$, $\nu = 0$ den eben berechneten Wert bekommt. Infolgedessen wird, wenn wir endlich in J^* anstatt λ, μ, ν die Argumente von φ, nämlich

$$\xi_1 = \xi + \lambda,$$
$$\eta_1 = \eta + \mu,$$
$$\zeta_1 = \zeta + \nu$$

als Integrationsvariable einführen,

$$J^* = \int K^*(\xi\eta\zeta;\ \xi_1\eta_1\zeta_1)\,\varphi_1\,d\omega, \tag{21}$$

wo

$$K^* = \frac{2\pi}{\sqrt{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}}\, e^{-\frac{\{\xi_1(\xi_1-\xi)+\eta_1(\eta_1-\eta)+\zeta_1(\zeta_1-\zeta)\}^2}{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}}$$

gesetzt ist.

Nunmehr behandeln wir das Integral

$$J^{**} = \iint |W|\, e^{-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}\,\varphi_1'\,d\omega_1\,d\mathfrak{S}$$

ähnlich, wie soeben das Integral J^*. Zunächst finden wir genau wie vorhin

$$J^{**} = 3\underset{0\leqq \mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2\leqq 1}{\iiiint\!\!\iint} |\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1|\,(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^{\frac{7}{2}}$$
$$e^{-\{(\lambda_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\xi)^2+(\mu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\eta)^2+(\nu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\zeta)^2\}}\,\varphi_1'\,d\lambda_1\,d\mu_1\,d\nu_1\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z},$$

wo jetzt

$$\varphi_1' = \varphi\,(\lambda_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-\mathfrak{x}(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1)+\xi,$$
$$\mu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-\mathfrak{y}(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1)+\eta,$$
$$\nu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-\mathfrak{z}(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1)+\zeta)$$

zu nehmen ist. Sodann wählen wir statt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die neuen Integrationsvariablen

$$\lambda = \lambda_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-\mathfrak{x}(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1),$$
$$\mu = \mu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-\mathfrak{y}(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1),$$
$$\nu = \nu_1(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-\mathfrak{z}(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1);$$

wegen

$$\mathfrak{x}\lambda+\mathfrak{y}\mu+\mathfrak{z}\nu = 0,$$
$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)(\lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1),$$

und da die Funktionaldeterminante, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1, & \mathfrak{x}\mu_1-2\mathfrak{y}\lambda_1, & \mathfrak{x}\nu_1-2\mathfrak{z}\lambda_1 \\ \mathfrak{y}\lambda_1-2\mathfrak{x}\mu_1, & \mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{z}\nu_1, & \mathfrak{y}\nu_1-2\mathfrak{z}\mu_1 \\ \mathfrak{z}\lambda_1-2\mathfrak{x}\nu_1, & \mathfrak{z}\mu_1-2\mathfrak{y}\nu_1, & \mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1 \end{vmatrix} = 2(\lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1)(\mathfrak{x}\lambda_1+\mathfrak{y}\mu_1+\mathfrak{z}\nu_1)$$

wird, erhalten wir durch Vergleich mit (19) das einfache Resultat

$$J^{**} = J^{*}. \tag{22}$$

Mit Rücksicht auf (18), (21), (22) erhält der Integralausdruck (16) die Gestalt (17), wie oben behauptet worden ist, wo der Kern K die Bedeutung hat:

$$K(\xi\eta\zeta;\xi_1\eta_1\zeta_1) = 2\pi e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\Big\{\sqrt{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}\, e^{-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}$$
$$-\frac{2}{\sqrt{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}}\, e^{-\frac{\{\xi_1(\xi_1-\xi)+\eta_1(\eta_1-\eta)+\zeta_1(\zeta_1-\zeta)\}^2}{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}}\Big\}. \tag{23}$$

Unter Benutzung der Identität

$$\frac{\{\xi_1(\xi_1-\xi)+\eta_1(\eta_1-\eta)+\zeta_1(\zeta_1-\zeta)\}^2}{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}+\xi^2+\eta^2+\zeta^2$$
$$=\frac{(S_1-P)^2+S(S+S_1-2P)}{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2}=\frac{(S+S_1-P)^2-SS_1}{(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2},$$

wo

$$S = \xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$
$$S_1 = \xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2,$$
$$P = \xi\xi_1+\eta\eta_1+\zeta\zeta_1$$

bedeutet, ersehen wir, daß K ein symmetrischer Kern der beiden Variabelnreihen ξ, η, ζ und ξ_1, η_1, ζ_1 ist. Außerdem zeigt der eben gefundene Ausdruck (23), daß der Kern K für

$$\xi=\xi_1,\quad \eta=\eta_1,\quad \zeta=\zeta_1$$

nur von der ersten Ordnung unendlich wird und daher die gesamte Theorie der Integralgleichungen auf ihn anwendbar ist.

Insbesondere entnehmen wir hieraus, daß die Frage der Auflösung der Integralgleichung

$$J = f(\xi\eta\zeta), \tag{24}$$

wenn f eine gegebene Funktion von ξ, η, ζ ist, notwendig durch die Kenntnis der Lösungen der homogenen Integralgleichung

$$J = 0 \tag{25}$$

bedingt ist. Um diese Lösungen zu ermitteln, multipliziere man den Ausdruck (16) für J mit φ und integriere nach ξ, η, ζ über den unendlichen Geschwindigkeitsraum; nach Formel (13) wird dann, wenn wir in derselben

$$H=\varphi,\quad F=e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},\quad G=e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\varphi$$

nehmen:

$$\int\varphi J d\omega = \tfrac{1}{4}\iiint |W|\, e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}(\varphi+\varphi_1-\varphi'-\varphi_1')^2 d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{S}.$$

Soll nun φ eine Lösung von (25) sein, so muß für ein solches φ auch das Integral rechts hier verschwinden, und dies ist nur möglich, wenn der Integrand Null ist, d. h. wenn

$$\varphi+\varphi_1-\varphi'-\varphi_1' = 0$$

wird. Dem Früheren zufolge gibt es lediglich die fünf linear voneinander unabhängigen Funktionen

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= 1, \\ \psi^{(2)} &= \xi, \\ \psi^{(3)} &= \eta, \\ \psi^{(4)} &= \zeta, \\ \psi^{(5)} &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \end{aligned} \tag{26}$$

die jene Gleichung erfüllen, und damit ist bewiesen, daß die lineare homogene Integralgleichung (25) keine anderen Lösungen besitzt als diejenigen, die aus jenen fünf Lösungen durch lineare Kombination mit konstanten Koeffizienten entstehen.[1])

Hiermit ist die Untersuchung der linearen Integralgleichung (24), auf welche wir durch die Gleichung (11) geführt wurden, beendet, und ich fasse die gefundenen Resultate, wie folgt, zusammen:

Die zur Bestimmung der Funktion φ *dienende Gleichung* (24) *ist eine lineare* (*orthogonale*) *Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern. Die zugehörige homogene Integralgleichung* (25) *hat genau die fünf linear voneinander unabhängigen Lösungen* (26), *und mithin besitzt* (24) *dann und nur dann eine Lösung* φ, *wenn f die fünf Integralbedingungen* (*Orthogonalitätsbedingungen*)

$$\int \psi^{(i)} f d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

erfüllt.

Auf Grund dieses Satzes ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit, ψ aus (15) d. h. Ψ aus (11) zu bestimmen, das Bestehen der fünf Gleichungen:

$$\int \psi^{(i)} [\Phi] d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{27}$$

Dies sind, wie die Ausrechnung zeigt und schon von Maxwell erkannt worden ist, nichts anderes als die hydrodynamischen Gleichungen einschließlich der Kontinuitätsgleichung und der thermodynamischen Grundgleichung für ein ideales Gas in erster Annäherung: die hydrodynamischen Gleichungen erscheinen somit als die Orthogonalitätsbedingungen für die Lösbarkeit unserer linearen Integralgleichung; es sind fünf partielle Differentialgleichungen für die fünf Größen a, b, u, v, w (bez. Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit) als

---

1) Den schönen Beweis dieses Satzes hat zuerst Herr Dr. E. Hecke gefunden, dessen Hilfe — er war in der von mir im Wintersemester 1911/12 über Gastheorie gehaltenen Vorlesung mein Assistent — mir auch sonst bei der Ausarbeitung der hier entwickelten Theorie von großem Werte war.

Funktionen von x, y, z, t. Da die Determinante ihrer linken Seiten in bezug auf die zeitlichen Ableitungen

$$\frac{\partial a}{\partial t}, \quad \frac{\partial b}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \tag{28}$$

— sie ist im wesentlichen die aus den Elementen

$$\int \psi^{(i)} \psi^{(j)} \Phi d\omega, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

gebildete Determinante — nicht Null ist, so sind die Lösungen der fünf partiellen Differentialgleichungen (27) eindeutig bestimmt, wenn man die Werte von a, b, u, v, w oder auch — was offenbar auf das nämliche hinausläuft — die Werte von

$$\int \psi^{(i)} \Phi d\omega, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{29}$$

für $t = t_0$ als Funktionen von x, y, z willkürlich — etwa gleich $f^{(i)}$ — vorschreibt; wir wollen die so erhaltenen allgemeinsten Lösungen von (27) mit a^*, b^*, u^*, v^*, w^* bezeichnen und überdies

$$\Phi^* = a^* e^{-b^* \{(\xi - u^*)^2 + (\eta - v^*)^2 + (\zeta - w^*)^2\}}$$

setzen.

Nachdem wir so das erste Glied in der Entwicklung (8) von F auf die allgemeinste Weise bestimmt haben, führen wir die nämliche Aufgabe für das zweite Glied durch.

Es sei jetzt $\psi^{(0)}$ diejenige völlig bestimmte Lösung der aus (15) hervorgehenden linearen Integralgleichung

$$\tfrac{1}{4} \sigma^2 \iint |W| \Phi^* \Phi_1^* (\psi_1' + \psi' - \psi_1 - \psi)\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{2} [\Phi^*],$$

für welche

$$\int \psi^{(i)} \psi^0 \Phi^* d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

wird; dann ist

$$\Psi^0 = \psi^0 \Phi^*.$$

diejenige völlig bestimmte Lösung der aus (11) hervorgehenden Integralgleichung

$$\iint [\Phi^*, \Psi]\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{2} [\Phi^*], \tag{30}$$

für welche

$$\int \psi^{(i)} \Psi^0 d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{31}$$

wird, und die allgemeinste Lösung von (30) ist

$$\Psi = \Psi^0 + \Phi^* \sum^{(j)} c^{(j)} \psi^{(j)}, \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{32}$$

wobei die fünf Größen $c^{(j)}$ willkürliche Funktionen von x, y, z, t bedeuten. Nunmehr schreiben wir die zur Bestimmung von X dienende Gleichung (12) wie folgt

$$\iint [\Phi, X]\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = \tfrac{1}{2}[\Psi] - \tfrac{1}{2}\iint [\Psi, \Psi]\, d\omega_1\, d\mathfrak{s}, \tag{33}$$

und tragen darin Φ^* an Stelle von Φ und den Ausdruck (32) an Stelle von Ψ ein. Da diese Gleichung dieselbe Gestalt wie (11) oder (30) aufweist und daher ebenfalls auf die lineare Integralgleichung (24) zurückführbar ist, so erhalten wir als notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit, X zu bestimmen, die Gleichungen

$$\int \psi^{(i)}[\Psi]\, d\omega - \iiint \psi^{(i)}[\Psi, \Psi]\, d\omega\, d\omega_1\, d\mathfrak{s} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

oder, da wegen (13) das zweite Integral verschwindet,

$$\int \psi^{(i)}[\Psi]\, d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{34}$$

d. h. wenn (32) an Stelle von Ψ eingetragen wird:

$$\int \psi^{(i)}[\Psi^0 + \Phi^* \sum^{(j)} c^{(j)} \psi^{(j)}]\, d\omega = 0. \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Dies sind fünf lineare partielle Differentialgleichungen für die fünf Funktionen $c^{(j)}$. Da die Funktionaldeterminante ihrer linken Seiten nach den zeitlichen Ableitungen (28) genau mit der oben betrachteten Determinante übereinstimmt und daher von Null verschieden ausfällt, so sind die Lösungen dieser Differentialgleichungen eindeutig bestimmt, sobald man die Werte von $c^{(j)}$ oder auch, — was offenbar auf das nämliche hinausläuft — die Werte von

$$\int \psi^{(i)}\, \Psi\, d\omega, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{35}$$

für $t = t_0$ willkürlich als Funktionen von x, y, z — etwa gleich $g^{(i)}$ — vorschreibt; wir wollen die so erhaltene allgemeinste Lösung von (34) mit Ψ^* bezeichnen.

So fortfahrend verstehen wir unter X^0 diejenige völlig bestimmte Lösung der Integralgleichung (33), für welche

$$\int \psi^{(i)} X^0\, d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{36}$$

wird; die allgemeinste Lösung von (33) ist dann

$$X = X^0 + \Phi^* \sum^{(j)} c^{(j)} \psi^{(j)}, \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

wobei die Größen $c^{(j)}$ willkürliche Funktionen von x, y, z, t bedeuten. Da jedoch wiederum die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int \psi^{(j)}[X]\, d\omega = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{37}$$

erfüllt sein müssen, so bleiben nur die Werte von $c^{(j)}$ für $t = t_0$ willkürlich: wir schreiben statt ihrer die Werte von

$$\int \psi^{(i)} X\, d\omega, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{38}$$

für $t = t_0$ willkürlich als Funktionen von x, y, z — etwa gleich $h^{(i)}$ — vor und bezeichnen die so erhaltene allgemeinste Lösung von (37) mit X^*.

Bei diesem Prozesse der Herstellung der allgemeinsten Lösung

$$F^* = \frac{\Phi^*}{\lambda} + \Psi^* + X^*\lambda + \cdots \tag{39}$$

der Fundamentalgleichung (4) treten in jedes einzelne Glied jedesmal fünf neue willkürliche Funktionen von x, y, z, nämlich die Funktionen (29), (35), (38), ... ein; diese willkürlichen Funktionen erscheinen aber in dem Gesamtausdruck für F in der Weise kombiniert, daß derselbe in Wahrheit nur fünf willkürliche Funktionen der Variabeln x, y, z enthält.

Um diese wichtige Tatsache einzusehen, bedenken wir, daß (39) eine der Fundamentalgleichung (4) genügende Potenzreihe von λ ist derart, daß die Ausdrücke

$$\int \psi^{(i)} F^* d\omega = \frac{\int \psi^{(i)} \Phi^* d\omega}{\lambda} + \int \psi^{(i)} \Psi^* d\omega + \lambda \int \psi^{(i)} X^* d\omega + \cdots \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

für $t = t_0$ bzw. in die Potenzreihen:

$$A^{(i)} = \frac{f^{(i)}}{\lambda} + g^{(i)} + \lambda h^{(i)} + \cdots, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

übergehen, und daß es nur eine solche Potenzreihe gibt. Wir bestimmen jetzt andererseits nach dem eben dargelegten Verfahren eine der Fundamentalgleichung (4) genügende Potenzreihe F von λ derart, daß wir für die fünf Ausdrücke (29) für $t = t_0$ nicht wie früher $f^{(i)}$ sondern die Werte $\lambda A^{(i)}$ und sodann für (35), (38), ... an Stelle $g^{(i)}, h^{(i)}, \ldots$ jedesmal Null vorschreiben. Dieser Konstruktion zufolge wird F eine solche Potenzreihe von λ, daß die fünf Ausdrücke $\int \psi^{(i)} F d\omega$ ebenfalls für $t = t_0$ identisch für alle λ in $A^{(i)}$ übergehen. Folglich ist

$$F = F^*;$$

wir erkennen also, daß auch F die allgemeinste Potenzreihenlösung der Fundamentalgleichung (4) darstellt, und damit ist unsere Behauptung bewiesen. Die gefundenen Resultate fassen wir in folgendem Theorem zusammen:

In der Mannigfaltigkeit aller nach Potenzen von λ fortschreitenden Lösungen der Fundamentalgleichung (4) *ist eine Lösung F eindeutig bestimmt, sobald man für sie die Werte der fünf Integrale*

$$\int \psi^{(i)} F d\omega, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{40}$$

für $t = t_0$ als Funktionen von x, y, z vorschreibt — etwa gleich $A^{(i)}$.

Man erhält diese Lösung durch folgendes Verfahren: zunächst nehme man für Φ den Ausdruck (14) *und bestimme darin a, b, u, v, w als Funktionen von x, y, z, t aus den fünf partiellen Differentialgleichungen* (27), *wobei man für $t = t_0$ die fünf Integralwerte* (29) *gleich $\lambda A^{(i)}$ vorschreibt;*

sodann bestimme man diejenige Lösung Ψ^0 *der linearen Integralgleichung* (11), *für welche die fünf Bedingungen* (31) *erfüllt sind, setze*

$$\Psi = \Psi^0 + \Phi \sum^{(j)} c^{(j)} \psi^{(j)} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

und bestimme die fünf Funktionen $c^{(j)}$ *von* x, y, z, t *aus den fünf linearen partiellen Differentialgleichungen* (34), *wobei man für* $t = t_0$ *die fünf Integralwerte* (35) *gleich Null vorschreibe; endlich bestimme man diejenige Lösung* X^0 *der linearen Integralgleichung* (12), *welche die fünf Bedingungen* (36) *erfüllt, setze*

$$X = X^0 + \Phi \sum^{(j)} c^{(j)} \psi^{(j)}$$

und bestimme hierin die fünf Funktionen $c^{(j)}$ *von* x, y, z, t *aus den linearen partiellen Differentialgleichungen* (37), *wobei man wiederum für* $t = t_0$ *die Integralwerte* (38) *gleich Null vorschreibe usw. Die Ausdrücke* (9) *stellen dann die Fundamentalfunktion* F *in erster, zweiter, dritter Annäherung usw. dar.*

Nach den Ausführungen auf S. 270 ist die Potenzreihenentwicklung (8) nach λ der mathematische Ausdruck für die Stabilität des Bewegungszustandes des Gases, und da F den Zustand des Gases für alle Zeit bestimmt und die Kenntnis der Integralwerte (40) uns gerade die Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit des Gases liefert, so entnehmen wir aus dem obigen Theorem das folgende für die Gastheorie grundlegende Resultat.

Der Zustand eines stabilen Gases ist für alle Zeit eindeutig bestimmt, wenn man für dasselbe zur Zeit $t = t_0$ *Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit als Funktionen des Ortes kennt.*

Wir haben früher auf S. 270 gesehen, daß bei der Entwicklung nach Potenzen von $t - t_0$ die Mannigfaltigkeit der Lösungen F der Fundamentalgleichung (4) eine weit höhere ist, als sie sich jetzt bei der Entwicklung nach Potenzen von λ unserem Theorem zufolge herausstellt: damals durfte F für $t = t_0$ willkürlich als Funktion von $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$ vorgeschrieben werden, jetzt dagegen nur die fünf Integralwerte (40) als Funktionen von x, y, z. Es ist also lediglich die Forderung der Stabilität in der von mir aufgestellten Formulierung auf S. 270, die die Mannigfaltigkeit der Lösungen der Fundamentalgleichung (4) so wesentlich einschränkt, daß dadurch eine Gastheorie möglich wird. — Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen, wie sie zur Begründung der Fundamentalformel selber herangezogen werden, spielen hierbei keine Rolle. Zur weiteren Begründung der Gastheorie haben wir vielmehr nur nötig, die Vorschriften unseres oben aufgestellten Theorems auszuführen; dieses Verfahren bietet keinerlei Schwierigkeit und läßt nirgends einen Zweifel entstehen, welche Glieder bei Berechnung einer bestimmten Annäherung zu berücksichtigen sind. So liefert ohne Zuhilfenahme einer

neuen Annahme beispielsweise die Berechnung der zweiten Annäherung nicht nur den Beweis des zweiten Wärmesatzes und den Boltzmannschen Ausdruck für die Entropie des Gases, sondern auch die Bewegungsgleichungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung und der Wärmeleitung[1]); dabei erscheinen die Reibungs- und Wärmeleitungskonstanten als Zahlen, die durch Auflösung gewisser Integralgleichungen numerisch zu berechnen sind.

Zum Schlusse sei noch eines Ergebnisses Erwähnung getan, das ich eben gefunden habe und die elementare Theorie der Strahlung, insbesondere den bekannten Kirchhoffschen Satz über das Verhältnis zwischen Emission und Absorption betrifft. Ich erkannte, daß es wiederum eine gewisse Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern ist, die den Mittelpunkt dieser Theorie bildet, und während bei näherer Prüfung alle bisherigen Beweise des Kirchhoffschen Satzes sich als ungenügend herausstellten, gelingt mittelst jener Integralgleichung dieser Beweis auf Grund der elementaren Definitionen und Begriffe der Strahlungstheorie auf die einfachste und vollständigste Weise — ein neues bedeutsames Zeugnis für die weitreichende Kraft, die der Theorie der linearen Integralgleichungen innewohnt.

1) H. A. Lorentz hat in seinen anregenden und tiefsinnigen Untersuchungen über Gastheorie das nämliche Ziel verfolgt; er gelangt dort zu einer Gleichung, die die Rolle der Gleichung (11) in meiner Theorie vertritt, und sucht die Eindeutigkeit der Lösung derselben durch Berufung auf einen Satz von Boltzmann zu beweisen (vgl H. A. Lorentz, Gesammelte Abhandlungen Bd. I S. 88); diese Schlußweise von H. A. Lorentz ist aber nicht stichhaltig, und auch seine weiteren Entwicklungen daselbst sind, selbst für den einfachsten Fall des einatomigen Gases, mathematisch unbegründet, nicht nur weil sie wesentlich die Tatsache der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung benutzen, sondern vor allem auch weil die Existenz einer Lösung für die Lorentzsche Gleichung nicht erwiesen wird — und ohne Heranziehung der Theorie der linearen Integralgleichungen auch nicht erwiesen werden kann.



